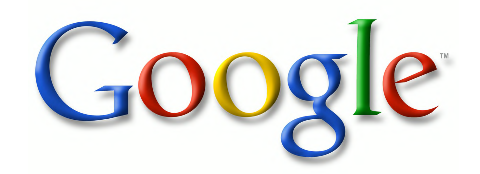
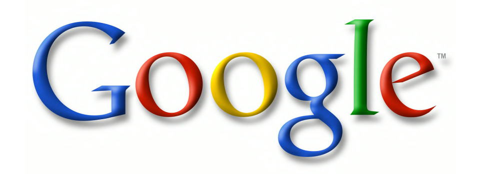
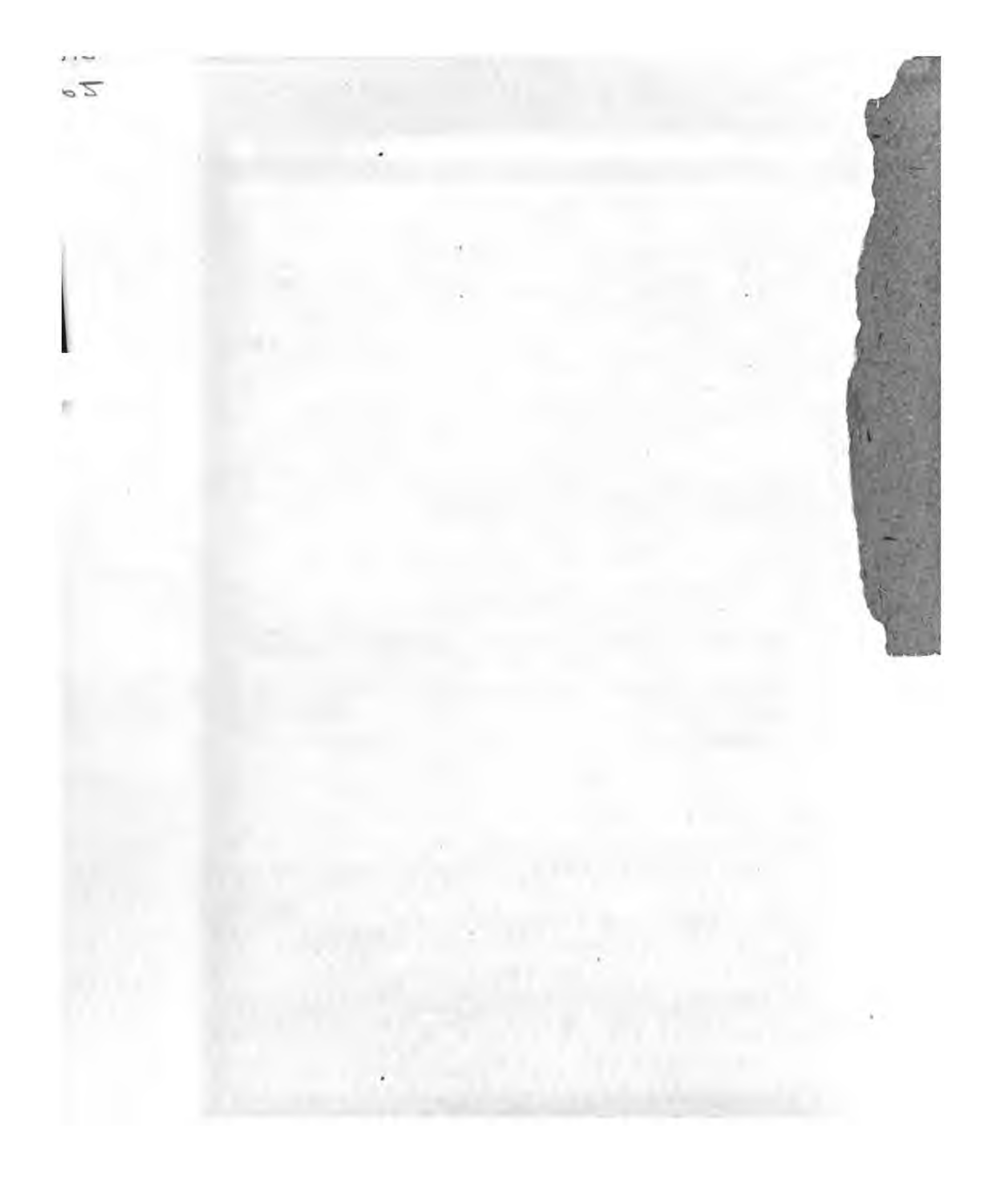





Stanford University Libraries
3 6105 000 993 688



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Dreiundachtzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1877.
Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des dreiundachtzigsten Bandes.

Druckfehler.

In dem Aufsatze Bd. 82 „Bemerkungen zu dem Principe des kleinsten Zwanges" ist von Seite 321 an bei der Anzahl l der Bedingungsgleichungen $\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}, \ldots \Phi_l = \text{const}$ überall anstatt des deutschen $\mathfrak{l}$ ein lateinisches l zu setzen.

Ueber die Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensystem angehört.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Bekanntlich hat *Bouquet* (*Liouville* Journ. Tome XI) zuerst darauf hingewiesen, dass nicht zu jeder Flächenschaar $\varrho = f(x, y, z)$ zwei andere Flächenschaaren angegeben werden können, die mit ihr ein System sich orthogonal schneidender Flächen bilden. Er zeigte, dass die Bedingung der Existenz zweier solcher Schaaren an die Erfüllung einer Differentialgleichung für den Parameter ϱ geknüpft ist, die er in dem besonderen Fall, dass ϱ von der Form $\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z)$ ist, ausführte, von deren allgemeiner Herleitung er der scheinbaren Complication der Rechnung wegen, Abstand nahm. Die schönen Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme von *Serret* und die späteren von *Bonnet,* welche dieser Bemerkung folgten, haben jene Differentialgleichung nicht zugänglicher gemacht. Erst nachdem *Lévy* in einer ausgezeichneten Abhandlung (Journal de l'école polytechnique, Tome XVI, 1870) eine geometrische Bedingung, die für die Existenz dieser Flächensysteme hinreichend und nothwendig ist, kennen gelehrt hatte, gelang es *Cayley* (Comptes rendus LXXIV) die erwähnte Differentialgleichung *dritter* Ordnung in einer sehr complicirten Form aufzustellen, deren Herleitung von *Darboux,* der die Theorie der in Rede stehenden Flächen vielfach bereichert hat, vereinfacht wurde. Endlich hat *Schläfli* im 76. Bde. dieses Journals die nämliche Differentialgleichung in einer unausgeführten Form aufgestellt.

Es scheint daher, dass die Frage nach der Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensysteme angehört, bisher nicht eine Erledigung von der Einfachheit gefunden hat, deren sie fähig ist. Die nachstehenden Entwickelungen haben den Zweck eine solche zu geben.

1.

Es seien $\varrho = f(x, y, z)$, $\varrho_1 = f_1(x, y, z)$, $\varrho_2 = f_2(x, y, z)$ die Gleichungen dreier Flächenschaaren, welche ein orthogonales System bilden. Die Lage eines Punktes (xyz) im Raume ist alsdann bestimmt durch die Werthe,

welche $\varrho\varrho_1\varrho_2$ in ihm besitzen, und das Quadrat der Entfernung dieses Punkts von einem ihm unendlich nahe gelegenen ist durch die Gleichung

$$dx^2+dy^2+dz^2 = H^2 d\varrho^2+H_1^2 d\varrho_1^2+H_2^2 d\varrho_2^2$$

gegeben. Die Werthe von HH_1H_2 sind im Punkte (xyz)

$$H=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2}},\quad H_1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\right)^2}},$$

$$H_2=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}\right)^2}}$$

und genügen, falls man sie durch die für diesen Punkt gegebenen Grössen $\varrho\varrho_1\varrho_2$ bestimmt denkt, einem System partieller Differentialgleichungen, das zuerst von *Lamé* (Leçons sur les coordonnées curvilignes pag. 76 et sequ.) aufgestellt worden ist.

Die Gerade, welche im Punkte (xyz) die durch ihn gehende Fläche constanter ϱ senkrecht durchschneidet, bildet mit den Axen der Coordinaten Winkel, deren Cosinus $\xi\eta\zeta$ durch

$$\xi=H\frac{\partial\varrho}{\partial x},\quad \eta=H\frac{\partial\varrho}{\partial y},\quad \zeta=H\frac{\partial\varrho}{\partial z}$$

gegeben sind.

Bildet man das Integral

$$T=\int\left(\frac{\partial H}{\partial x}d\xi+\frac{\partial H}{\partial y}d\eta+\frac{\partial H}{\partial z}d\zeta\right)$$

über eine geschlossene Curve, welche in einer beliebigen der Flächen $\varrho=\text{const.}$ gelegen ist, und die die ganze Begrenzung eines von Unstetigkeiten freien Stücks derselben bildet, so wird

$$T=\int\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho_1}\right)d\varrho_1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial\varrho_2}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial\varrho_2}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho_2}\right)d\varrho_2\right\},$$

und da nach dem *Dupin*schen Theorem den Veränderungen von ϱ_1 oder ϱ_2 Uebergänge in den Krümmungslinien der Fläche $\varrho=\text{const.}$ entsprechen, also die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\varrho_1}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial\varrho_1},\quad \frac{\partial\eta}{\partial\varrho_1}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial y}{\partial\varrho_1},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial\varrho_1}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial z}{\partial\varrho_1},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\varrho_2}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial\varrho_2},\quad \frac{\partial\eta}{\partial\varrho_2}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial y}{\partial\varrho_2},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial\varrho_2}=\frac{1}{r_2}\frac{\partial z}{\partial\varrho_2},$$

in denen $r_1 r_2$ die Hauptkrümmungsradien dieser Fläche in dem entsprechenden

Punkte des Integrationsweges bezeichnen, so geht T über in das Integral

$$\int\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial H}{\partial\varrho_1}d\varrho_1+\frac{1}{r_2}\frac{\partial H}{\partial\varrho_2}d\varrho_2\right)$$

und mit Berücksichtigung der für Flächen eines orthogonalen Systems bekannten Relationen (*Lamé,* loc. cit.)

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial\varrho},\quad \frac{1}{r_2}=\frac{1}{HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial\varrho}$$

in

$$T=\int\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial\varrho_1}\frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial\varrho}d\varrho_1+\frac{1}{H}\frac{\partial H_2}{\partial\varrho}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial\varrho_2}d\varrho_2\right].$$

Zwischen den Grössen HH_1H_2 und ihren Differentialquotienten besteht aber nach *Lamé* die Gleichung (*Lamé,* loc. cit. pag. 79, Gleichungen (10.))

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial\varrho_1}\frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial\varrho}\right)}{\partial\varrho_2}=\frac{\partial\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H_2}{\partial\varrho}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial\varrho_2}\right)}{\partial\varrho_1},$$

in Folge deren sich für das Integral

$$\int\left(\frac{\partial H}{\partial x}d\xi+\frac{\partial H}{\partial y}d\eta+\frac{\partial H}{\partial z}d\zeta\right)$$

der Werth Null ergiebt. Setzt man

$$\frac{\partial H}{\partial x}d\xi+\frac{\partial H}{\partial y}d\eta+\frac{\partial H}{\partial z}d\zeta = u\,dx+v\,dy+w\,dz,$$

so wird

$$\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz) = 0,$$

wenn das Integral über eine willkürliche geschlossene Curve erstreckt wird, welche in ihrer ganzen Ausdehnung in einer der Flächen $\varrho=\text{const.}$ liegt. In Folge einer bekannten Transformation ist diese Gleichung gleichbedeutend mit der folgenden:

$$0=\iint\left[\xi\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]d\sigma,$$

in welcher die doppelte Integration über alle Flächenelemente $d\sigma$ des vom Integrationswege begrenzten Flächenstücks der Fläche $\varrho=\text{const.}$ zu erstrecken ist. Bei der Willkürlichkeit der Wahl dieser Begrenzung und der Wahl der Fläche ϱ erfordert diese Gleichung das Verschwinden der Grösse

$$\xi\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

für jeden Punkt des Raums, welcher der Flächenschaar $\varrho=f(x,y,z)$ angehört. Da die Grössen uvw aus den ersten und zweiten Derivirten der Function ϱ

zusammengesetzt sind, so ergiebt sich, dass diese Function, falls die Gleichung $\varrho = f(x, y, z)$ eine Flächenschaar eines orthogonalen Systems darzustellen im Stande ist, der partiellen Differentialgleichung *dritter* Ordnung

$$0 = \xi\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

genügen muss.

Es ist jedoch für die Anwendung, wie für Transformationen dieser Gleichung, vortheilhafter die gleichgeltende Bedingung zu substituiren, dass für jede Fläche einer Schaar, die einem orthogonalen Systeme angehört, die Quantität

$$\frac{\partial H}{\partial x} d\xi + \frac{\partial H}{\partial y} d\eta + \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta$$

in ein Totaldifferential übergehen muss, wenn die Differentiation nur auf Punkte *in der Fläche* bezogen wird.

In jeder Fläche der in Rede stehenden Gattung ist daher das von einem gegebenen Punkte über einen beliebigen Integrationsweg erstreckte Integral

$$T = \int\left(\frac{\partial H}{\partial x} d\xi + \frac{\partial H}{\partial y} d\eta + \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta\right)$$

nur Function des Orts des Endpunkts dieses Weges in der Fläche.

2.

Der Beweis des Satzes, dass jeder Flächenschaar $\varrho = f(x, y, z)$ die der oben angegebenen Bedingung Genüge leistet, zwei andere $\varrho_1 = f_1(x, y, z)$, $\varrho_2 = f_2(x, y, z)$ zugeordnet sind, die mit ihr ein orthogonales System bilden, erfordert einen geringen Aufwand von Rechnung.

Bezeichne nunmehr $\varrho = f(x, y, z)$ die Gleichung *irgend einer* Flächenschaar; seien ferner $\xi\eta\zeta$ die Cosinus der Winkel der im Punkte (xyz) zu der betreffenden Fläche Normalen, $\xi_1\eta_1\zeta_1$ und $\xi_2\eta_2\zeta_2$ die Cosinus der Tangenten an die durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien, mit der Festsetzung dass die Richtung der Normalen gegen die der ersten und zweiten Tangente in demselben Sinne gewählt sei, wie diejenige der x-Axe gegen die Axen der y und z. Schliesslich mögen r_1 und r_2 die Werthe der betreffenden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche ϱ im Punkte (xyz) angeben.

Setzt man der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} d\xi &= \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz, \\ d\eta &= \alpha'\, dx + \beta'\, dy + \gamma'\, dz, \\ d\zeta &= \alpha''\, dx + \beta''\, dy + \gamma''\, dz, \end{aligned}$$

so genügen bekanntlich die Cosinus $\xi_1\eta_1\zeta_1$ den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1}\xi_1 &= \alpha\,\xi_1+\beta\,\eta_1+\gamma\,\zeta_1,\\
\frac{1}{r_1}\eta_1 &= \alpha'\,\xi_1+\beta'\,\eta_1+\gamma'\,\zeta_1,\\
\frac{1}{r_1}\zeta_1 &= \alpha''\xi_1+\beta''\eta_1+\gamma''\zeta_1,\\
0 &= \xi\,\xi_1+\eta\,\eta_1+\zeta\,\zeta_1,
\end{aligned}$$

aus denen durch Vertauschung der Indices ähnliche für die Cosinus $\xi_2\eta_2\zeta_2$ abgeleitet werden können. Aus der Combination der letzten dieser Gleichungen mit jeder der drei übrigen kann man Werthe bestimmen, welche den Grössen $\xi_1\eta_1\zeta_1$ proportional sind, und findet mit Leichtigkeit die entsprechenden ihnen hinzuzufügenden Factoren. Man gelangt so zu den Gleichungen

$$\text{(I.)}\quad\left\{\begin{array}{lll}
h\xi_2\xi_1=\eta\gamma-\zeta\beta, & h\eta_2\xi_1=\eta\gamma'-\zeta\beta'+\frac{1}{r_1}\zeta, & h\zeta_2\xi_1=\eta\gamma''-\zeta\beta''-\frac{1}{r_1}\eta,\\
h\xi_2\eta_1=\zeta\alpha-\xi\gamma-\frac{1}{r_1}\zeta, & h\eta_2\eta_1=\zeta\alpha'-\xi\gamma', & h\zeta_2\eta_1=\zeta\alpha''-\xi\gamma''+\frac{1}{r_1}\xi,\\
h\xi_2\zeta_1=\xi\beta-\eta\alpha+\frac{1}{r_1}\eta, & h\eta_2\zeta_1=\xi\beta'-\eta\alpha'-\frac{1}{r_1}\xi, & h\zeta_2\zeta_1=\xi\beta''-\eta\alpha'',
\end{array}\right.$$

in denen

$$h = \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}.$$

Multiplicirt man die dritte Gleichung der ersten Columne mit η, die zweite mit $-\xi$, und addirt die Resultate, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass die Grössen $\xi\eta\zeta$ $\xi_1\eta_1\zeta_1$ $\xi_2\eta_2\zeta_2$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden, unter Hinzuziehung der leicht zu entwickelnden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\alpha\,\xi+\beta\,\eta+\gamma\,\zeta &= \frac{1}{H}\Big(\xi\,w-\frac{\partial H}{\partial x}\Big)\\
\alpha'\,\xi+\beta'\,\eta+\gamma'\,\zeta &= \frac{1}{H}\Big(\eta\,w-\frac{\partial H}{\partial y}\Big)\\
\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta &= \frac{1}{H}\Big(\zeta\,w-\frac{\partial H}{\partial z}\Big)\\
w &= \xi\frac{\partial H}{\partial x}+\eta\frac{\partial H}{\partial y}+\zeta\frac{\partial H}{\partial z},\\
H &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2}}
\end{aligned}$$

die erste der nachstehenden neun Gleichungen:

$$h\xi_2.\xi_2 = -\alpha + \frac{\partial\varrho}{\partial x}\left[\xi\varkappa - \frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{1}{r_1}, \quad h\eta_2.\xi_2 = -\alpha' + \frac{\partial\varrho}{\partial x}\left[\eta\varkappa - \frac{\partial H}{\partial y}\right],$$

$$h\xi_2.\eta_2 = -\beta + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\left[\xi\varkappa - \frac{\partial H}{\partial x}\right], \quad h\eta_2.\eta_2 = -\beta' + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\left[\eta\varkappa - \frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{1}{r_1},$$

$$h\xi_2.\zeta_2 = -\gamma + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\left[\xi\varkappa - \frac{\partial H}{\partial x}\right], \quad h\eta_2.\zeta_2 = -\gamma' + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\left[\eta\varkappa - \frac{\partial H}{\partial y}\right],$$

$$h\zeta_2.\xi_2 = -\alpha'' + \frac{\partial\varrho}{\partial x}\left[\zeta\varkappa - \frac{\partial H}{\partial z}\right],$$

$$h\zeta_2.\eta_2 = -\beta'' + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\left[\zeta\varkappa - \frac{\partial H}{\partial z}\right],$$

$$h\zeta_2.\zeta_2 = -\gamma'' + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\left[\zeta\varkappa - \frac{\partial H}{\partial z}\right] + \frac{1}{r_1},$$

$$\varkappa = w - \frac{H}{r_1}.$$

Aus der ersten Columne derselben folgt

$$H\left\{\frac{\partial h\xi_2.\eta_2}{\partial z} - \frac{\partial h\xi_2.\zeta_2}{\partial y}\right\} = \eta\left(\gamma\varkappa + \xi\frac{\partial\varkappa}{\partial z} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z}\right) - \zeta\left(\beta\varkappa + \xi\frac{\partial\varkappa}{\partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}\right),$$

$$H\left\{\frac{\partial h\xi_2.\zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial h\xi_2.\xi_2}{\partial z}\right\} = \zeta\left(\alpha\varkappa + \xi\frac{\partial\varkappa}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right) - \xi\left(\gamma\varkappa + \xi\frac{\partial\varkappa}{\partial z} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z}\right) - \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z},$$

$$H\left\{\frac{\partial h\xi_2.\xi_2}{\partial y} - \frac{\partial h\xi_2.\eta_2}{\partial x}\right\} = \xi\left(\beta\varkappa + \xi\frac{\partial\varkappa}{\partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}\right) - \eta\left(\alpha\varkappa + \xi\frac{\partial\varkappa}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit ξ_2, die zweite mit η_2, die dritte mit ζ_2, bezeichnet durch J_2 die Grösse

$$\xi_2\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial z} - \frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right) + \eta_2\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial\xi_2}{\partial z}\right) + \zeta_2\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial y} - \frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right)$$

und deutet die Derivirten von H durch Hinzufügung der entsprechenden Indices an, so ergiebt sich die erste Gleichung der folgenden:

$$Hh\xi_2 J_2 = -[\xi_1 H_{11} + \eta_1 H_{12} + \zeta_1 H_{13}] + \varkappa'\xi + \frac{\varkappa}{r_1}\xi_1 + \zeta_2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y} - \eta_2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z},$$

$$Hh\eta_2 J_2 = -[\xi_1 H_{21} + \eta_1 H_{22} + \zeta_1 H_{23}] + \varkappa'\eta + \frac{\varkappa}{r_1}\eta_1 + \xi_2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z} - \zeta_2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x},$$

$$Hh\zeta_2 J_2 = -[\xi_1 H_{31} + \eta_1 H_{32} + \zeta_1 H_{33}] + \varkappa'\zeta + \frac{\varkappa}{r_1}\zeta_1 + \eta_2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x} - \xi_2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y},$$

$$\varkappa' = \xi_1\frac{\partial\varkappa}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial\varkappa}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial\varkappa}{\partial z},$$

und aus ihnen:

$$HhJ_2 = -\{\xi_1\xi_2 H_{11} + \eta_1\eta_2 H_{22} + \zeta_1\zeta_2 H_{33} + (\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2)H_{23} + (\zeta_1\xi_2 + \xi_1\zeta_2)H_{13} + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)H_{12}\},$$

welche Grösse durch V bezeichnet werden möge.

Denselben Werth wird man für

$$Hh\left(\xi_1\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial z} - \frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\right) + \eta_1\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x} - \frac{\partial\xi_1}{\partial z}\right) + \zeta_1\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y} - \frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right)\right) = HhJ_1$$

aus den für $\xi_2\eta_2\zeta_2$ gültigen Gleichungen durch eine ähnlich geführte Rechnung erhalten.

Betrachtet man nunmehr die Differentialgrösse

$$\frac{\partial H}{\partial x}d\xi + \frac{\partial H}{\partial y}d\eta + \frac{\partial H}{\partial z}d\zeta = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

in welcher

$$u = \alpha\frac{\partial H}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial H}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial H}{\partial z},$$

$$v = \beta\frac{\partial H}{\partial x} + \beta'\frac{\partial H}{\partial y} + \beta''\frac{\partial H}{\partial z},$$

$$w = \gamma\frac{\partial H}{\partial x} + \gamma'\frac{\partial H}{\partial y} + \gamma''\frac{\partial H}{\partial z},$$

so ergiebt sich sofort:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \beta\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z} + \beta'\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z} + \beta''\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \gamma\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} - \gamma'\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \gamma''\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \gamma'\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} + \gamma''\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z} - \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z} - \alpha'\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z} - \alpha''\frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} + \alpha'\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \alpha''\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z} - \beta\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \beta'\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} - \beta''\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z},$$

und hieraus mit Rücksicht auf die Gleichungen (I.) für

$$\xi\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= h\{\xi_1\xi_2 H_{11} + \eta_1\eta_2 H_{22} + \zeta_1\zeta_2 H_{33} + (\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2)H_{23} + (\zeta_1\xi_2 + \xi_1\zeta_2)H_{13} + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)H_{12}\} = -hV.$$

Es ist hiernach

$$\xi\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -H\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 J_1$$

$$= -H\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 J_2,$$

oder falls man mit dem Element $d\sigma$ einer beliebigen der Flächen $\varrho = f(x, y, z)$ multiplicirt, und eine Integration über ein willkürlich begrenztes von Un-

stetigkeiten freien Stücks derselben ausführt:

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int \left(\frac{\partial H}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial H}{\partial y}\,d\eta + \frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta\right)$$

$$= -\iint H\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 J_1\,d\sigma = -\iint H\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 J_2\,d\sigma.$$

Verschwindet daher das Integral

$$\int \left(\frac{\partial H}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial H}{\partial y}\,d\eta + \frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta\right)$$

für jede Begrenzung eines in einer beliebigen der Flächen $\varrho = f(x, y, z)$ angenommenen Flächenstücks, so verschwinden auch, mit Ausnahme des Falls, dass für jede dieser Flächen $r_1 = r_2$ wäre, die Grössen J_1 und J_2. Man hat daher für alle Punkte des Raumes, die der Flächenschaar angehören:

$$\xi_1\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right) + \eta_1\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial z}\right) + \zeta_1\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\xi_2\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right) + \eta_2\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z}\right) + \zeta_2\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen sagen bekanntlich aus, dass die Differentialgrössen

$$\xi_1\,dx + \eta_1\,dy + \zeta_1\,dz,$$
$$\xi_2\,dx + \eta_2\,dy + \zeta_2\,dz$$

durch Multiplication mit entsprechenden Factoren in Totaldifferentiale übergeführt werden können.

Es sind daher unter der Voraussetzung, dass

$$0 = \int \left(\frac{\partial H}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial H}{\partial y}\,d\eta + \frac{\partial H}{\partial z}\,d\zeta\right),$$

die nachstehenden Gleichungen erfüllt

$$\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = H\,d\varrho,$$
$$\xi_1\,dx + \eta_1\,dy + \zeta_1\,dz = H_1\,d\varrho_1,$$
$$\xi_2\,dx + \eta_2\,dy + \zeta_2\,dz = H_2\,d\varrho_2.$$

Aus der Addition der Quadrate beider Seiten derselben ergiebt sich

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2\,d\varrho^2 + H_1^2\,d\varrho_1^2 + H_2^2\,d\varrho_2^2$$

und daher die Folgerung, dass die Flächenschaaren $\varrho_1 = f_1(x, y, z)$, $\varrho_2 = f_2(x, y, z)$ mit der gegebenen $\varrho = f(x, y, z)$ ein orthogonales System bilden.

In dem Falle, dass für jeden Punkt der Flächenschaar $\varrho = f(x, y, z)$ die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleichwerthig sind, folgt aus der aufgestellten Bedingung die Existenz zweier zugeordneten mit ihr ein orthogonales System bildenden Flächenschaaren nicht. Alsdann ist die gegebene Flächenschaar entweder eine Schaar von ***Ebenen*** oder von ***Kugeln***. Einer Schaar von Ebenen können bekanntlich in unbegrenzter Mannigfaltigkeit zwei Flächenschaaren zugeordnet werden, die mit ihr ein orthogonales System bilden (surfaces-moulures). Durch Transformation mittelst reciproker Radien kann man aus solchem System ein neues ableiten, in welchem eine Flächenschaar eine ***Kugelschaar*** ist. Die Frage ob ***jede*** Kugelschaar, bei willkürlicher Wahl des Orts der Mittelpunkte und der Radien der betreffenden Kugeln, einem Orthogonalsystem angehört, soll bei einer anderen Gelegenheit beantwortet werden.

Es ist bemerkenswerth, dass das Kriterium, unter dem eine Flächenschaar $\varrho = f(x, y, z)$ einem orthogonalen System angehört, streng genommen, nicht aus der endlichen Gleichung der Schaar, sondern aus der Differentialgleichung derselben

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0$$

gefolgert werden muss, da zur Entscheidung dieser Angehörigkeit offenbar die Kenntniss des Cosinus $\xi\eta\zeta$ in jedem Punkte des Raumes ausreichend ist. Aus einer leichten Transformation der zu erfüllenden Gleichung

$$\int \left(\frac{\partial H}{\partial x} d\xi + \frac{\partial H}{\partial y} d\eta + \frac{\partial H}{\partial z} d\zeta \right) = 0,$$

die eine Eigenschaft des ***integrirenden Factors*** der Differentialgleichung der Schaar ausdrückt, ergiebt sich dieses Kriterium in einer Relation zwischen den ersten und zweiten Derivirten der Cosinus $\xi\eta\zeta$, der unter anderen die folgende Form:

$$0 = \alpha \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \alpha'' \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + \beta \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \beta'' \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z},$$

$$\mathfrak{x} = \gamma' - \beta'', \quad \mathfrak{y} = \alpha'' - \gamma, \quad \mathfrak{z} = \beta - \alpha'$$

gegeben werden kann.

3.

Ist eine Flächenschaar durch die Gleichungen

$$\text{(II.)} \quad x = f(p, q, \varrho), \quad y = f_1(p, q, \varrho), \quad z = f_2(p, q, \varrho)$$

gegeben, so lässt sich die Bedingung, unter der sie einem System orthogonaler Flächen angehört, mit Hülfe des besprochenen Kriteriums in nachstehender Form aufstellen. Ist

$$\omega_{pp}\,dp^2 + 2\omega_{pq}\,dp\,dq + \omega_{qq}\,dq^2$$

das Quadrat des Linienelements einer beliebigen Fläche dieser Schaar, und bezeichnet $\varDelta$ die Determinante $\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial \varrho}$, so wird

$$H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\varDelta}{\sqrt{\omega_{pp}\,\omega_{qq} - \omega_{pq}^2}}.$$

Ferner lassen sich die Differentialquotienten der Cosinus $\xi\eta\zeta$ der Normalen in einem gegebenen Punkt dieser Fläche *linear* durch die Differentialquotienten der entsprechenden Coordinaten nach pq ausdrücken, und zwar mit Hülfe eines Systems von Coefficienten, das in der allgemeinen Theorie der krummen Flächen eine entscheidende Rolle spielt. (Vergl. Ueber eine besondere Classe auf einander abwickelbarer Flächen, Bd. 59 dieses Journals pag. 382.) Man hat danach die Beziehungen:

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial p} = P\frac{\partial x}{\partial p} + Q\frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial \xi}{\partial q} = P'\frac{\partial x}{\partial p} + Q'\frac{\partial x}{\partial q}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial p} = P\frac{\partial y}{\partial p} + Q\frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial \eta}{\partial q} = P'\frac{\partial y}{\partial p} + Q'\frac{\partial y}{\partial q}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial p} = P\frac{\partial z}{\partial p} + Q\frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial \zeta}{\partial q} = P'\frac{\partial z}{\partial p} + Q'\frac{\partial z}{\partial q}, \end{cases}$$

welchen man noch eine dritte Reihe für die Differentialquotienten von $\xi\eta\zeta$ nach ϱ mit den Coefficienten $P''Q''$ beifügen könnte, die jedoch für das Folgende entbehrlich ist. Die Coefficienten $P\ Q\ P'\ Q'$ lassen sich leicht durch die Grössen $\omega_{pp}\ \omega_{pq}\ \omega_{qq}$ und die von *Gauss* in die Theorie der krummen Flächen eingeführten Determinanten

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, \quad D' = \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}, \quad D'' = \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$$

folgendermassen ausdrücken:

$$P = \frac{D'\omega_{pq} - D\omega_{qq}}{(\omega_{pp}\,\omega_{qq} - \omega_{pq}^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad P' = \frac{D''\omega_{pq} - D'\omega_{qq}}{(\omega_{pp}\,\omega_{qq} - \omega_{pq}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Q = \frac{D\omega_{pq} - D'\omega_{pp}}{(\omega_{pp}\,\omega_{qq} - \omega_{pq}^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad Q' = \frac{D'\omega_{pq} - D''\omega_{pp}}{(\omega_{pp}\,\omega_{qq} - \omega_{pq}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und sind daher in Folge der Gleichungen (II.) gegebene Functionen der Grössen $pq\varrho$.

Aus den Gleichungen (III.) ergiebt sich für das, durch eine geschlossene auf einer der Flächen $\varrho = \text{const.}$ liegende Curve zu erstreckende Integral

$$\int\left(\frac{\partial H}{\partial x}d\xi + \frac{\partial H}{\partial y}d\eta + \frac{\partial H}{\partial z}d\zeta\right)$$

der Werth

$$\int\left[\left(P\frac{\partial H}{\partial p} + Q\frac{\partial H}{\partial q}\right)dp + \left(P'\frac{\partial H}{\partial p} + Q'\frac{\partial H}{\partial q}\right)dq\right],$$

welcher für den Fall, dass die Flächenschaar $\varrho = \text{const.}$ einem orthogonalen System angehört, verschwindet. Es muss daher durch

$$H = \Delta(\omega_{pp}\omega_{qq} - \omega_{pq}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{\partial\left(P\frac{\partial H}{\partial p} + Q\frac{\partial H}{\partial q}\right)}{\partial q} = \frac{\partial\left(P'\frac{\partial H}{\partial p} + Q'\frac{\partial H}{\partial q}\right)}{\partial p}$$

Genüge geschehen, welche Differentialgleichung die verlangte Bedingung ausdrückt.

Man macht leicht die Bemerkung, dass die Grösse H hiernach derselben linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung unterworfen ist, der in Folge der Gleichungen (III.) die Coordinaten $x\,y\,z$ für sich, oder auch die Function $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta x+\gamma y+\delta z+\varepsilon$, genügen *).

Die Coefficienten $P\ Q\ P'\ Q'$ lassen sich, anstatt aus den Gleichungen (II.) direct, auch aus den Coefficienten des Quadrates des Linienelements der Mannigfaltigkeit $p\,q\,\varrho$ entnehmen. Ist

$$dx^2+dy^2+dz^2 = \omega_{pp}dp^2+\omega_{qq}dq^2+\omega_{\varrho\varrho}d\varrho^2+2\omega_{q\varrho}dq\,d\varrho+2\omega_{p\varrho}dp\,d\varrho+2\omega_{pq}dp\,dq$$

und bezeichnet ω die Determinante $\Sigma\pm\omega_{pp}\omega_{qq}\omega_{\varrho\varrho}$, ferner w_{pp}, w_{qq} etc. die entsprechenden Unterdeterminanten, so ergiebt die Multiplication der Determinanten $D\ D'\ D''$ mit $\Delta = \sqrt{\omega}$ die Beziehungen

$$D = \sqrt{\omega}\begin{Bmatrix} pp \\ \varrho \end{Bmatrix}, \quad D' = \sqrt{\omega}\begin{Bmatrix} pq \\ \varrho \end{Bmatrix}, \quad D'' = \sqrt{\omega}\begin{Bmatrix} qq \\ \varrho \end{Bmatrix},$$

---

*) In dieser Bemerkung ist der *Darboux*sche Satz enthalten, dass eine Flächenschaar $\varrho = f(x, y, z)$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2}} = \alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta x+\gamma y+\delta z+\varepsilon$$

genügt, in der $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ willkürliche Functionen von ϱ sind, stets einem orthogonalen System angehört.

in denen die Grössen $\left\{ {pp \atop \varrho} \right\}$ etc. die von *Christoffel* (Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades Bd. 70 dieses Journals) angegebene Bedeutung haben. In Folge dessen erhält man

$$P = \frac{H}{w_{\varrho\varrho}} \left(\omega_{pq} \left\{ {pq \atop \varrho} \right\} - \omega_{qq} \left\{ {pp \atop \varrho} \right\} \right), \qquad P' = \frac{H}{w_{\varrho\varrho}} \left(\omega_{pq} \left\{ {qq \atop \varrho} \right\} - \omega_{qq} \left\{ {pq \atop \varrho} \right\} \right),$$

$$Q = \frac{H}{w_{\varrho\varrho}} \left(\omega_{pq} \left\{ {pp \atop \varrho} \right\} - \omega_{pp} \left\{ {pq \atop \varrho} \right\} \right), \qquad Q' = \frac{H}{w_{\varrho\varrho}} \left(\omega_{pq} \left\{ {pq \atop \varrho} \right\} - \omega_{pp} \left\{ {qq \atop \varrho} \right\} \right),$$

$$H = \sqrt{\frac{\omega}{w_{\varrho\varrho}}}.$$

Benützt man diese Werthe der Grössen P P' Q Q' und H zur Bildung der Gleichung (IV.) so ist sie der Ausdruck der Bedingung, dass aus dem quadratischen Differentialausdruck (der in eine Form mit constanten Coefficienten überzuführen ist)

$$\omega_{pp}\, dp^2 + \omega_{qq}\, dq^2 + \omega_{\varrho\varrho}\, d\varrho^2 + 2\,\omega_{q\varrho}\, dq\, d\varrho + 2\,\omega_{p\varrho}\, dp\, d\varrho + 2\,\omega_{pq}\, dp\, dq$$

durch eine Substitution $p = \varphi(p', q', \varrho)$, $q = \psi(p', q', \varrho)$ die Coefficienten der Producte $dq'\, d\varrho$, $dp'\, d\varrho$, $dp'\, dq'$ zum Verschwinden gebracht werden können, eine Bedingung, die mit derjenigen, dass die Flächen constanter Werthe von ϱ einem orthogonalen System angehören, identisch ist.

Berlin, December 1876.

Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces.

(Par M. *L. Fuchs* à Heidelberg.)

Extrait d'une lettre adressée à M. *Hermite*.

Dans le mémoire suivant je conçois le module k des fonctions elliptiques comme variable indépendante, et je définis les quantités K et K' comme des fonctions de cette variable au moyen de l'équation différentielle à laquelle elles satisfont. Soient K et K' des valeurs déterminées de ces fonctions pour une valeur donnée de k, leurs valeurs qui correspondent aux chemins de la variable indépendante menant au même point k, ont respectivement les formes a_1K+b_1K', a_2K+b_2K', où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des nombres indépendants de k. Je détermine ces nombres au moyen des principes établis dans mon mémoire (Journ. de M. *Borchardt* t. 71 p. 91), et ensuite je démontre, que la partie réelle du quotient

$$\mathrm{H} = \frac{a_2K+b_2K'}{a_1K+b_1K'}$$

est ou nulle, ou positive. Ce théorème comprend comme cas spécial le théorème connu dans la théorie des fonctions elliptiques, qui dit que, *pour une valeur fixe de k,* la partie réelle du quotient des deux intégrales définies K' et K est positive. Comme la démonstration de notre théorème plus général s'appuie sur des principes tout-à-fait différents de ceux qu'on applique pour démontrer le théorème spécial dans la théorie des fonctions elliptiques, elle en fournit en même temps une nouvelle démonstration.

Je considère ensuite dans l'équation $q = e^{-\pi \mathrm{H}}$, q comme variable indépendante, et je fais voir, que la fonction k^2 de q qui en résulte par l'inversion est, de même que K, une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{K}$, décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. De cette recherche il résulte une connexion entre k^2 et q telle que lorsque q décrit un chemin quelconque dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, partant du centre et aboutissant à un point quelconque de la périphérie, la fonction

k^2 partant du point $k=0$ doit aboutir à l'un des points $k=1$, $k=\infty$. Il s'ensuit que chaque point de la circonférence de $\mathfrak{K}$ est un point de discontinuité de la fonction k^2 de q. Voilà la cause de la propriété déjà signalée de cette fonction, de ne point permettre d'extension continuelle au delà de cette périphérie.

La dépendance qu'il y a entre k^2 et q et que nous venons d'indiquer, peut également être caractérisée de cette manière que dans le plan de k à un chemin quelconque joignant le point $k=0$ à l'un des points $k=1$, $k=\infty$, correspond un chemin de q, contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, partant de $q=0$ et aboutissant à la périphérie, de sorte que la fonction k^2 de q, holomorphe dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, épuise tous les points du plan de k.

Je considère en second lieu les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce, J et J', comme fonctions de la variable indépendante k, en les définissant par une équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elles satisfont. Les valeurs diverses de J et J' qui correspondent aux chemins divers de la variable indépendante menant au même point k, ont respectivement les formes $\alpha_1 J+\beta_1 J'$, $\alpha_2 J+\beta_2 J'$, où α_1, β_1, α_2, β_2 sont des nombres indépendants de k. Ayant déterminé ces nombres, je fais l'étude du quotient

$$Z = \frac{\alpha_1 J+\beta_1 J'}{\alpha_2 J+\beta_2 J'}.$$

Ensuite je considère dans l'équation $s=e^{-\pi Z}$, s comme variable indépendante, et je démontre que la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s, qui en résulte par l'inversion, est aussi holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{L}$, décrit autour du point $s=0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. Mais on trouve une différence essentielle entre la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s et la fonction k^2 de q dont il a été question plus haut: c'est que les valeurs de k correspondant aux points de l'intérieur de $\mathfrak{L}$, n'épuisent pas tous les points du plan de k; au contraire la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s permet une extension continuelle au delà de la périphérie de $\mathfrak{L}$, de telle manière que dans l'extérieur de $\mathfrak{L}$ elle est aussi holomorphe pour toute valeur finie de q. Enfin notre recherche même éclaircira pourquoi c'est $\frac{J}{J'}$ et non $\frac{J'}{J}$ qui joue le rôle analogue à $\frac{K'}{K}$.

1.

Supposons k réel et en valeur absolue inférieur à l'unité, et posons

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Si en prenant la racine carrée avec le signe positif, on effectue les intégrations tout le long de l'axe réel des x, ces intégrales seront des fonctions de k bien déterminées. Soient $x^2 = y$ et $k^2 = \frac{1}{u}$, de sorte que u est réel et $\geqq 1$; on aura

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \quad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

où la racine $\sqrt{u}$ est positive et les intégrations s'effectuent le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée.

En posant

$$\eta_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \quad \eta_2 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

on a

$$K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}.\eta_1, \quad K' = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}.\eta_2.$$

2.

Les valeurs des fonctions η_1, η_2 de u étant définies dans le numéro précédent pour des valeurs limitées de la variable u, je me propose de les déterminer pour des valeurs quelconques complexes de cette variable. Pour cela je recours à leur propriété connue de satisfaire à l'équation différentielle

$$(A.) \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \tfrac{1}{2}\eta = 0.$$

(Voir p. e. mon mémoire dans le Journ. de M. *Borchardt* t. 71, p. 118, éq. (7.))

Au même endroit (p. 122) j'ai démontré ce qui suit:

Au point singulier $u = 0$ appartient le système fondamental d'intégrales v_{01}, v_{02} qui, dans le domaine du même point, ont les formes:

$$(1.) \qquad \begin{cases} v_{01} = 1 + \sum_1^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2b-1)}{2.4.6\ldots 2b}\right)^2 u^b, \\ v_{02} = H_0(u)v_{01} - v_{01}\log u, \end{cases}$$

où $H_0(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par

l'équation:

$$H_0(u) = 4\log 2 + \int_0^u \frac{1+v_{01}^2(u-1)}{v_{01}^2 u(u-1)}\, du.$$

Au point singulier $u = 1$ appartient le système fondamental d'intégrales v_{11}, v_{12} qui, dans le domaine du point $u = 1$, ont les formes:

$$(2.)\quad \begin{cases} v_{11} = 1+\sum_1^\infty (-1)^k\left(\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\right)^2 (u-1)^k, \\ v_{12} = H_1(u)\,v_{11}+v_{11}\log(u-1), \end{cases}$$

où $H_1(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par l'équation:

$$H_1(u) = -4\log 2 + \int_1^u \frac{1-v_{11}^2 u}{u(u-1)v_{11}^2}\, du.$$

Enfin au point singulier $u = \infty$ appartient le système fondamental d'intégrales $v_{\infty 1}$, $v_{\infty 2}$ qui, dans le domaine de $u = \infty$, ont les formes:

$$(3.)\quad \begin{cases} v_{\infty 1} = \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_1^\infty\left(\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\right)^2\left(\frac{1}{u}\right)^k\right], \\ v_{\infty 2} = v_{\infty 1}H_\infty(u)+v_{\infty 1}\log\frac{1}{u}, \end{cases}$$

où $H_\infty(u)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine, définie par l'équation:

$$H_\infty(u) = -4\log 2 - \int_\infty^u \frac{1+v_{\infty 1}^2(1-u)}{v_{\infty 1}^2 u(u-1)}\, du.$$

On a par conséquent

$$(4.)\quad \eta_1 = a_1 v_{11} + b_1 v_{12}; \qquad \eta_2 = a_2 v_{11} + b_2 v_{12},$$

où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des constantes que nous allons déterminer.

En posant

$$\eta_1 = A_1 + B_1$$

et

$$A_1 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}\, dy, \quad B_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(u-y)}},$$

où l'on doit prendre $\sqrt{y}$ positive et effectuer les intégrations le long de l'axe réel des y avec les signes positifs des racines carrées, on a

$$A_1 = 2\log 2, \quad \text{pour} \quad u = 1; \quad \text{puis on a}$$

$$B_1 = 2\log(\sqrt{u}+1) - \log(u-1).$$

Donc

$$\lim[\eta_1+\log(u-1)] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u = 1.$$

En ayant égard aux équations (2.), il suit de la première des équations (4.):

$$b_1 = -1, \quad a_1 = 0.$$

Par un calcul analogue il vient:

$$\lim \eta_2 = \pi, \quad \text{pour} \quad u = 1; \quad \text{et puis}$$

$$b_2 = 0, \quad a_2 = \pi.$$

La relation (4.) devient ainsi:

$$(B.) \qquad \eta_1 = -v_{12}, \quad \eta_2 = \pi v_{11}.$$

Nous avons de même

$$(5.) \qquad \eta_1 = c_1 v_{\infty 1} + d_1 v_{\infty 2}; \quad \eta_2 = c_2 v_{\infty 1} + d_2 v_{\infty 2},$$

où c_1, d_1, c_2, d_2 sont des constantes que nous allons déterminer. On voit immédiatement que

$$\lim \eta_1 \sqrt{u} = \pi, \quad \text{pour} \quad u = \infty.$$

Il s'ensuit donc des équations (3.)

$$d_1 = 0, \quad c_1 = \pi.$$

Posons $y = u-(u-1)z$ dans η_2; on aura

$$\eta_2 \sqrt{u} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}} = A_\infty + B_\infty,$$

et

$$A_\infty = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{z})\,dz}{\sqrt{z(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}}, \quad B_\infty = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)\left[1-\frac{u-1}{u}z\right]}},$$

où les intégrations doivent être effectuées de la même manière que dans les intégrales A_1, B_1. On a

$$\left.\begin{aligned} \lim A_\infty &= 2\log 2, \\ \lim B_\infty &= 2\log 2 - \lim\log\frac{1}{u}; \end{aligned}\right\} (\text{pour } u = \infty)$$

donc

$$\lim\left[\eta_2\sqrt{u}+\log\frac{1}{u}\right] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u = \infty.$$

Par conséquent, en ayant égard aux équations (3.), il vient

$$d_2 = -1, \quad c_2 = 0.$$

Nous obtenons ainsi:

$$(C.)\qquad \eta_1 = \pi v_{\infty 1},\quad \eta_2 = -v_{\infty 2}.$$

Posons enfin

$$(6.)\qquad \eta_1 = e_1 v_{01} + f_1 v_{02},\quad \eta_2 = e_2 v_{01} + f_2 v_{02}.$$

La détermination des constantes e_1, f_1, e_2, f_2 exige un autre procédé, parce que η_1, η_2 ne sont définies dans le n°. précédent que pour des valeurs réelles de u qui surpassent l'unité. L'une ou l'autre des équations (*B.*) et (*C.*) est propre à définir les fonctions η_1, η_2 pour toute l'étendue du plan u, les fonctions v_{11}, v_{12}, $v_{\infty 1}$, $v_{\infty 2}$ étant déterminées dans ce plan. (Voir mes mémoires t. 66, p. 121; t. 75, p. 177 du journ. de M. *Borchardt*). Nous pourrions aussi définir η_1, η_2 pour toute l'étendue du plan, en fixant leurs valeurs par des intégrales définies d'après la méthode de mon mém. t. 71, p. 123. Une circulation de u autour du point $u=1$ change η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités, représentées d'après les équations (*B.*) par la substitution:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1, & -2i \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

De même une circulation de u autour de $u=\infty$ change η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités, représentées d'après les équations (*C.*) par la substitution:

$$S_\infty = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 2i, & -1 \end{pmatrix}.$$

Et si le même contour est décrit dans le sens inverse, η_1, η_2 deviennent des fonctions linéaires et homogènes de ces quantités représentées par la substitution:

$$S_{-\infty} = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ -2i, & -1 \end{pmatrix}.$$

Désignons par

$$S_0 = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

la substitution qui sert à déterminer les fonctions linéaires et homogènes des quantités η_1, η_2, qui résultent d'une circulation de u autour du point $u=0$; on aura

$$(7.)\qquad S_{-\infty} = S_1 . S_0,$$

en désignant comme on le fait usuellement, une substitution composée de deux ou de plusieurs autres, par le produit des substitutions composantes.

L'équation (7.) peut être écrite ainsi

$$\begin{pmatrix}-1, & 0\\ -2i, & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-2\gamma i, & \beta-2\delta i\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$$

et fournit tout de suite:

$$\alpha-2\gamma i=-1,\quad \beta-2\delta i=0,\quad \gamma=-2i,\quad \delta=-1$$

ou

$$(8.)\qquad \alpha=3,\quad \beta=-2i,\quad \gamma=-2i,\quad \delta=-1;$$

donc

$$S_0 = \begin{pmatrix}3, & -2i\\ -2i, & -1\end{pmatrix}.$$

Or d'après les équations (6.) et (1.) on a

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1, & f_1\\ e_2, & f_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ -2\pi i, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1, & f_1\\ e_2, & f_2\end{pmatrix}^{-1},$$

en désignant par S^{-1} la substitution inverse d'une substitution S, ou en posant

$$e_1 f_2 - e_2 f_1 = \Delta,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\dfrac{2\pi i f_1 f_2}{\Delta}, & \dfrac{2\pi i f_1^2}{\Delta}\\ -\dfrac{2\pi i f_2^2}{\Delta}, & 1+\dfrac{2\pi i f_1 f_2}{\Delta}\end{pmatrix}.$$

On en tire donc à l'aide des équations (8.):

$$(9.)\qquad \frac{\pi i f_1 f_2}{\Delta}=-1,\quad \frac{\pi f_1^2}{\Delta}=-1,\quad \frac{\pi f_2^2}{\Delta}=1.$$

Mais comme une de ces équations est une conséquence des deux autres, elles ne présentent en effet que deux équations pour la détermination des quantités e_1, f_1, e_2, f_2. Deux autres équations découlent de la méthode suivante, par laquelle nous pourrons obtenir encore d'autres formules utiles pour ce mémoire.

On a (Voir p. e. mon mém. t. 66, p. 121)

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\eta_1}{du} & \eta_1\\ \dfrac{d\eta_2}{du} & \eta_2\end{vmatrix} = \frac{C}{u(u-1)},$$

où C est indépendant de u. Par conséquent

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\eta_1}{du}(u-1), & \eta_1(u-1)\\ \dfrac{d\eta_2}{du}, & \eta_2\end{vmatrix} = \frac{C}{u}.$$

D'après les équations (*B.*) et (2.), η_2 et $\frac{d\eta_2}{du}$ ont des valeurs finies pour $u=1$, savoir $\eta_2=\pi$; en outre $\eta_1(u-1)=0$ et $\frac{d\eta_1}{du}(u-1)=-1$ pour $u=1$. Donc on a

$$C=-\pi,$$

et par conséquent:

$$(D.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{du} & \eta_1 \\ \frac{d\eta_2}{du} & \eta_2 \end{vmatrix} = \frac{-\pi}{u(u-1)}.$$

On a de même:

$$\begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ \frac{dv_{02}}{du} & v_{02} \end{vmatrix} = \frac{C'}{u(u-1)}$$

où C' est indépendant de u; donc

$$\begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ u\frac{dv_{02}}{du} & uv_{02} \end{vmatrix} = \frac{C'}{u-1}.$$

En posant $u=0$, on trouve d'après les équations (1.)

$$C' = -1,$$

par conséquent

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ \frac{dv_{02}}{du} & v_{02} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u(u-1)}.$$

Or on déduit des équations (6.)

$$\begin{vmatrix} \frac{d\eta_1}{du} & \eta_1 \\ \frac{d\eta_2}{du} & \eta_2 \end{vmatrix} = \varDelta \begin{vmatrix} \frac{dv_{01}}{du} & v_{01} \\ \frac{dv_{02}}{du} & v_{02} \end{vmatrix},$$

par conséquent on conclut des équations (*D.*) et (10.)

$$(11.)\qquad \varDelta = \pi.$$

Soit u une quantité réelle et positive inférieure à 1, et l'intégrale

$$\vartheta = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}$$

prise le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée; ϑ regardée comme fonction de u satisfait à l'équation différentielle (A.). Par un calcul analogue à celui que nous venons de faire pour la détermination de la limite de η_1 pour $u=1$, on déduit

$$\lim\vartheta = -\pi, \quad \text{pour} \quad u=1.$$

D'une manière semblable à celle que l'on a employée ci-dessus pour η_2 on trouve:

$$(12.) \qquad \vartheta = -\pi v_{11}.$$

De cette équation et des équations (B.) on conclut, que ϑ représente, pour des valeurs réelles de u comprises entre 0 et 1, la continuation de la fonction $-\eta_2$ telle qu'elle est définie par l'équation (B.) ou (C.). Donc on a

$$\lim\eta_2 = -\lim\vartheta, \quad \text{pour} \quad u=0.$$

Mais en posant

$$\vartheta = A_0 + B_0,$$

où

$$A_0 = \int_1^u \frac{1-\sqrt{1-y}}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}\,dy, \quad B_0 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-u)}},$$

on a

$$\left.\begin{aligned} \lim A_0 &= -2\log 2, \\ \lim B_0 &= -2\log 2 + \lim\log u. \end{aligned}\right\} \text{(pour } u=0.)$$

Donc

$$\lim[\eta_2 + \log u] = 4\log 2, \quad \text{pour} \quad u=0.$$

De l'équation (6.) on déduit, en ayant égard aux équations (1.),

$$f_2 = 1, \quad e_2 = 0.$$

Par conséquent les équations (9.) et (11.) donnent les valeurs

$$e_1 = \pi, \quad f_1 = i, \quad e_2 = 0, \quad f_2 = 1.$$

On a donc:

$$(E.) \qquad \eta_1 = \pi v_{01} + i v_{02}; \quad \eta_2 = v_{02}.$$

Ces équations et les équations (1.) pourraient servir à déterminer l'expression de S_0, que l'on trouverait d'accord avec l'expression déjà donnée plus haut.

3.

Recherchons maintenant les diverses valeurs que les fonctions η_1, η_2 peuvent acquérir pour un point quelconque u, d'après les divers chemins que peut suivre la variable pour parvenir à ce point.

A cet effet on déduit aisément les équations

$$(1.)\quad S_0^n = \begin{pmatrix} 3, & -2i \\ -2i, & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2n+1, & -2ni \\ -2ni, & -(2n-1) \end{pmatrix},$$

$$(2.)\quad S_1^n = \begin{pmatrix} 1, & -2i \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1, & -2ni \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

pour une valeur quelconque entière de n, en désignant toujours une substitution composée de plusieurs autres par des produits et des puissances des substitutions composantes.

Les substitutions S_0, S_1 et leurs puissances ont par conséquent la forme:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu i \\ \nu i, & \varrho \end{pmatrix},$$

où λ, μ, ν, ϱ sont des nombres réels et entiers. Composons la substitution σ avec une substitution semblable σ':

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \lambda', & \mu' i \\ \nu' i, & \varrho' \end{pmatrix},$$

où λ', μ', ν', ϱ' représentent aussi des nombres entiers et réels; il en résulte la substitution

$$\sigma'' = \sigma\sigma' = \begin{pmatrix} \lambda\lambda' - \mu\nu', & (\lambda\mu' + \mu\varrho')i \\ (\nu\lambda' + \varrho\nu')i, & -\nu\mu' + \varrho\varrho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'', & \mu'' i \\ \nu'' i, & \varrho'' \end{pmatrix}$$

de la même forme.

De là il suit que la substitution:

$$\Pi = S_0^k S_1^l S_0^{k_1} S_1^{l_1} S_0^{k_2} S_1^{l_2} \ldots,$$

où k, l, k_1, l_1, k_2, l_2, ... signifient des nombres réels et entiers positifs, négatifs ou nuls, *a toujours la forme d'une substitution* σ.

Comme un chemin quelconque de la variable u change les fonctions η_1, η_2 en des fonctions linéaires et homogènes de ces fonctions dont les coefficients s'obtiennent par une substitution de la forme Π, il s'ensuit que toutes les valeurs dont η_1 et η_2 soient susceptibles pour le même point u, sont représentées par les formules:

$$(F.)\quad \lambda\eta_1 + \mu i\eta_2, \quad \nu i\eta_1 + \varrho\eta_2,$$

où λ, μ, ν, ϱ sont des nombres réels entiers. Les déterminants des substitutions S_0 et S_1 étant égaux à l'unité, et le déterminant d'une substitution composée de plusieurs autres étant, comme l'on sait, égal au produit des déterminants des substitutions composantes, il en résulte que

$$(G.)\quad \lambda\varrho + \mu\nu = 1.$$

4.

D'après le n°. précédent le quotient

$$H = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{K'}{K}$$

prendra dans un point quelconque u, pour les divers chemins par où la variable u y parvient, les valeurs contenues dans la forme:

$$(\alpha.) \qquad \frac{\nu i + \varrho H_0}{\lambda + \mu i H_0} = \frac{i}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda + \mu i H_0} - \frac{\varrho i}{\mu}$$

en désignant par H_0 une valeur quelconque parmi celles que H acquiert dans u, et par λ, μ, ν, ϱ des nombres réels entiers qui satisfont à l'équation (*G*.).

Or d'après les équations (*B*.), (*C*.), (*E*.) et les équations (1.), (2.), (3.) du n°. 2, on a

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} H_0 = -i \quad \text{pour} \quad u = 0, \\ H_0 = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1, \\ H_0 = \frac{4 \log 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim \log u \quad \text{pour} \quad u = \infty, \quad \text{c. à. d.} \end{cases}$$

que la partie réelle de H_0 est infinie et positive pour $u = \infty$.

Donc toutes les valeurs qu'acquiert H pour les points $u = 0, 1, \infty$, la variable u y parvenant par un chemin quelconque, sont représentées par les formules suivantes:

$$\text{pour} \quad u = 0, \quad H = \frac{\nu - \varrho}{\lambda - \mu} i,$$

$$\text{pour} \quad u = 1, \quad H = \frac{\nu}{\lambda} i,$$

$$\text{pour} \quad u = \infty, \quad H = \text{ ou à } \frac{-\varrho}{\mu} i$$

ou à un nombre dont la partie réelle est infinie et positive; en désignant toujours par λ, μ, ν, ϱ des nombres réels entiers qui satisfont à l'équation (*G*.). Il faut remarquer que la seconde valeur que H peut avoir pour $u = \infty$, correspond à $\mu = 0$. Mais on a alors d'après l'équation (*G*.) $\lambda \varrho = 1$, ou, λ, ϱ étant des nombres entiers, $\lambda = \varrho = \pm 1$, c. à. d. $\frac{\varrho}{\lambda} = 1$. Portant dans ($\alpha$.) la valeur de H_0 en (β.) pour $u = \infty$ et $\mu = 0$, on arrive à une valeur dont la partie réelle est infinie et positive.

Posons maintenant

$$q = e^{-\pi H},$$

les différentes valeurs qu'acquiert q pour $u = 0, 1, \infty$, la variable u ayant

décrit pour parvenir à l'un de ces points un chemin quelconque, sont données dans la table suivante:

$$(H.)\quad \begin{cases} q = e^{-\pi\delta i} & \text{pour}\quad u=0, \\ q = e^{-\pi\varepsilon i} & \text{pour}\quad u=1, \\ q = \ \text{ou à}\ \ e^{-\pi\zeta i} & \text{ou à zéro,} \end{cases}$$

où δ, ε, ζ sont des nombres réels et rationnels. Donc:

A l'exception de la valeur $q=0$ *toutes les valeurs de la table* (*H.*) *ont des modules égaux à l'unité.*

5.

On déduit des équations (*B.*), (*C.*), (*E.*) et des équations (1.), (2.), (3.) du n°. 2

$$(1.)\quad \mathrm{H} = \frac{H_0(u)-\log u}{\pi+i[H_0(u)-\log u]}\quad \text{dans le domaine de } u=0,$$

$$(2.)\quad \mathrm{H} = \frac{\pi}{-H_1(u)-\log(u-1)}\quad \text{dans le domaine de } u=1,$$

$$(3.)\quad \mathrm{H} = -\frac{1}{\pi}H_\infty(u)-\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{u}\quad \text{dans le domaine de } u=\infty.$$

Comme $H_0(u)$, $-H_1(u)$, $-H_\infty(u)$ dans le voisinage respectivement de $u=0$, $u=1$, $u=\infty$ ne diffèrent que très-peu de la valeur $4\log 2$, tandis que les parties réelles de $\log u$, $\log(u-1)$, $\log\frac{1}{u}$ dans le voisinage respectivement des mêmes points acquièrent des valeurs infinies négatives, on conclut, que *les parties réelles des valeurs de* H *données par les formules* (1.), (2.), (3.), *sont positives dans trois parties du plan, dont l'une contient le point* $u=0$, *l'autre le point* $u=1$ *et la troisième le point* $u=\infty$. Désignons ces parties du plan respectivement par f_0, f_1, f_∞.

Soit pour un chemin quelconque de u

$$\mathrm{H} = \alpha+\beta i,$$

où α, β sont des quantités réelles; on a d'après le n°. 4, formule (α.) cette valeur de H pour un autre chemin quelconque de u:

$$\mathrm{H} = \frac{\nu i+\varrho(\alpha+\beta i)}{\lambda+\mu i(\alpha+\beta i)} = \frac{\alpha\varrho+(\beta\varrho+\nu)i}{\lambda-\mu\beta+\mu\alpha i}.$$

La partie réelle en est d'après l'équation (*G.*):

$$\frac{\alpha}{(\lambda-\mu\beta)^2+\mu^2\alpha^2}.$$

Donc:

Le signe de la partie réelle de H *est indépendant du chemin parcouru par la variable* u.

En appliquant ce théorème aux valeurs de H pour les points de f_0, f_1, f_∞, on trouve:

La partie réelle de* H *en un point quelconque de* f_0, f_1, f_∞ *est positive ou nulle, indépendamment du chemin qu'a parcouru u pour parvenir à ce point,
ou bien:

Le module de q est égal ou inférieur à l'unité pour les points de* f_0, f_1, f_∞, *indépendamment du chemin de u.

6.

De l'équation (*D.*) résulte

$$\frac{dH}{du} = \frac{\pi}{u(u-1)\eta_1^2},$$

et par suite

$$\frac{dq}{du} = -\frac{\pi^2 q}{u(u-1)\eta_1^2}$$

ou

$$(J.) \qquad \frac{du}{dq} = -\frac{u(u-1)\eta_1^2}{\pi^2 q}.$$

On déduit des équations (*C.*) et (3.) n°. 2, que dans le domaine de $u=\infty$

$$q = e^{\frac{v_{\infty 2}}{v_{\infty 1}}} = e^{H_\infty(u)+\log\frac{1}{u}};$$

donc on a

$$(1.) \qquad q = \tfrac{1}{16}\cdot\frac{1}{u}+\left(\frac{1}{u}\right)^2 f\left(\frac{1}{u}\right),$$

où $f\left(\frac{1}{u}\right)$ représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{u}$ et convergente dans le domaine de $u=\infty$. Au moyen d'un théorème connu on tire de cette équation:

$$(2.) \qquad \frac{1}{u} = 16q+q^2\varphi(q),$$

où $\varphi(q)$ représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de q et convergente à l'intérieur d'un cercle décrit autour du point $q=0$ comme centre avec un rayon suffisamment petit.

En considérant dans l'équation différentielle (*J.*) q comme variable indépendante, cette équation a une intégrale $\frac{1}{u}$, s'évanouissant avec q et représentée par l'équation (2.) dans le voisinage de $q=0$. D'après un théorème connu (Voir le mém. des MM. *Briot* et *Bouquet* dans le journal de l'école polytechn. cah. 36 p. 138) cette intégrale reste holomorphe dans une partie du plan qui contient $q=0$, et où $\frac{du}{dq}$ a la même propriété par

rapport à q et u, ou bien l'on n'a point $q = \infty$ et u n'acquiert aucune des valeurs 0, 1.

En outre pour une valeur $q = q'$ finie, différente de zéro et non située sur la circonférence du cercle décrit autour de $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité, il n'est pas possible que u prenne une valeur u' différente de 0, 1, ∞ et pour laquelle η_1 soit égale à zéro. Car on aurait alors dans le voisinage de $u = u'$, $\eta_1 = (u-u')f(u)$, où $f(u)$ est holomorphe dans le même voisinage et ne s'évanouit pas pour $u = u'$; et l'on déduirait de l'équation $(J.)$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{u-u'}\right) = \frac{u(u-1)f^2(u)}{\pi^2 q}.$$

Donc $\frac{1}{u-u'}$ serait dans le voisinage de $q = q'$ une fonction holomorphe de q et ne deviendrait pas infinie pour $q = q'$, contre l'hypothèse.

Mais pour la fonction u de q on a toujours l'équation:

$$(3.) \qquad q = e^{-\pi H},$$

et d'après le n°. 4 pour $u = 0, 1$, le module de q est égal à l'unité; d'où l'on conclut immédiatement ce théorème:

I. ***Si l'on considère dans l'équation** (3.) **u comme fonction de q, cette fonction est holomorphe dans un cercle $\mathfrak{K}$ décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. En outre dans aucun point de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ la variable u n'acquiert une valeur qui fasse évanouir la fonction η_1.***

L'équation** (2.) **définit la fonction u dans toute l'étendue du cercle $\mathfrak{K}$.

La définition des fonctions η_1, η_2 par des intégrales définies (Voir n°. 1) fait voir que, pour des valeurs réelles et positives de u supérieures à l'unité, H sera réel et positif et ne s'annulera que pour $u = \infty$. Donc quand u parcourt l'axe réel dès l'infini jusqu'à l'unité, q partira de $q = 0$, décrira une courbe dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, enfin s'arrêtera dans un point λ de la périphérie $\mathfrak{P}$ de ce cercle. Quand q, tout en partant de $q = 0$, décrit dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$ une courbe quelconque qui se termine à un point quelconque de $\mathfrak{P}$, on pourrait supposer que u, partant de $u = \infty$, parvînt à l'un des points $u = 0, 1$ ou n'y parvînt pas. Soit σ une partie finie de la courbe $\mathfrak{P}$, dont les points ne correspondent ainsi à aucun des points $u = 0, 1$, tandis qu'une extrémité μ de cet arc appartient à l'une des valeurs $u = 0, 1$; alors $\frac{du}{dq}$ est fini et déterminé le long de l'arc σ, et d'après le théorème déjà cité (Voir *Briot* et *Bouquet* l. c.) on pourrait, en traversant l'arc σ,

continuer la fonction u de q à l'extérieur de $\mathfrak{K}$, et de cette manière u serait aussi pour tout point fini de cet extérieur une fonction holomorphe de q, puisque le module de q y est partout supérieur à l'unité, et par suite u différent de 0, 1. Donc tous les points de l'intérieur du cercle $\mathfrak{K}$ et les points à distance finie de son extérieur, qui communiquent les uns avec les autres par des chemins traversant l'arc σ, constituent ensemble un domaine du plan, dans lequel l'intégrale u de l'équation différentielle ($J.$), qui devient infinie pour $q = 0$, est holomorphe. Deux chemins de q qui joignent le point $q = 0$ au point μ, mais dont l'un est entièrement renfermé à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, tandis que l'autre traverse d'abord la périphérie le long de σ et reste ensuite à l'extérieur de $\mathfrak{K}$, correspondent donc à deux chemins de u, qui mènent de $u = \infty$ jusqu'au même point $u = 0$, ou $u = 1$. Mais cela est impossible, car ce serait une contradiction avec le théorème énoncé à la fin du numéro précédent et d'après lequel aux valeurs de u dans le voisinage de l'un des points 0, 1, correspondent des valeurs de q, dont les modules sont inférieurs à l'unité.

Ayant démontré qu'il y a au moins un point λ de la périphérie $\mathfrak{P}$ jouissant de la propriété, qu'un chemin joignant $q = 0$ à $q = \lambda$ et restant dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, ramène la fonction de $u = \infty$ jusqu'à un des points $u = 0$, $u = 1$, on a ce théorème:

II. *Si la variable q part de $q = 0$ et parcourt un rayon quelconque du cercle $\mathfrak{K}$, la fonction u part de $u = \infty$ et finit par arriver à l'un des points 0, 1 au moment où q atteint la périphérie $\mathfrak{P}$.*

Si la variable u passe dans le plan des u de $u = \infty$ jusqu'à l'un des points $u = 0$, $u = 1$, la valeur correspondante de q partira de $q = 0$ et décrira un chemin entièrement contenu dans $\mathfrak{K}$ jusqu'à la périphérie $\mathfrak{P}$; car d'après le théorème II. q ne peut atteindre $\mathfrak{P}$ avant que u soit parvenu à l'un des points $u = 0$ ou $u = 1$. On peut donc énoncer ce théorème:

III. *A chaque valeur finie ou infinie de u correspondent des valeurs de q, dont les modules sont inférieurs ou égaux à l'unité. Il est impossible d'étendre d'une manière continue, à travers la périphérie de $\mathfrak{K}$, l'intégrale u de l'équation différentielle ($J.$) qui devient infinie pour $q = 0$.*

Le nombre de ces valeurs de q qui correspondent à la même valeur de u, est infini. L'une en étant $e^{-\pi H}$, les autres sont d'après le n°. 4

$$e^{-\pi\left(\frac{\nu i + \varrho H}{\lambda + \mu i H}\right)},$$

où λ, μ, ν, ϱ sont des nombres réels et entiers définis dans le n°. 3.

Puisque d'après le théorème I. toutes les dérivées de u envisagé comme fonction de q, ainsi que la fonction u elle-même sont holomorphes à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, on conclut de l'équation différentielle ($J.$):

IV. *La fonction η_1^2 est aussi une fonction holomorphe de q à l'intérieur de $\mathfrak{K}$.*

On parvient aussi au théorème suivant:

V. *La fonction η_1 de q est différente de zéro pour toute valeur à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, excepté pour le point $q = 0$; elle devient infinie pour tous les points de la périphérie.*

En premier lieu pour tout point de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ différent de $q = 0$, notre assertion se trouve déjà démontrée par le théorème I.

Soit maintenant q'' un point de la périphérie. D'après le théorème II. on devra faire correspondre à cette valeur l'un ou l'autre des points $u = 0$, $u = 1$; les équations ($F.$), ($E.$), ($B.$) montrent alors que η_1 est toujours infini. Il pourrait sembler que les cas où pour $u = 0$, $\lambda + \mu = 0$ et où pour $u = 1$, $\lambda = 0$, dussent faire exception. Mais comme λ, μ, ν, ϱ satisfont à l'équation ($G.$), on aurait dans le premier cas $\lambda = \mu = \pm 1$; par conséquent η_1 aurait dans le domaine de $u = 0$ la forme $\eta_1 = \pm \pi v_{01}$. Dans le second cas μ serait égale à ± 1, et par conséquent η_1 aurait dans le domaine de $u = 1$ la forme $\eta_1 = \pm \pi v_{11}$. Dans l'un et l'autre cas $\frac{u(u-1)\eta_1^2}{q}$ serait dans le voisinage de $q = q'$, $u = 0$ ou $u = 1$, une fonction holomorphe de u et de q, et par conséquent, d'après le théorème déjà cité, l'intégrale u de l'équation différentielle ($J.$), étendue d'une manière continue de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ à l'intérieur d'un cercle entourant le point q'', resterait holomorphe dans ce cercle, et ainsi nous obtiendrions des valeurs de u correspondant à des valeurs de q, dont les modules surpasseraient l'unité; ce qui est impossible d'après le théorème III.

Le théorème précédent peut aussi être énoncé comme il suit:

V^a. *La fonction η_1 de u ne s'évanouit que pour $u = \infty$ et devient infinie pour $u = 0$, $u = 1$, quel que soit le chemin parcouru par la variable u.*

Du théorème V. on conclut aussi qu'il est impossible d'établir une extension continue de la fonction η_1 de q en passant de l'intérieur de $\mathfrak{K}$ à travers la périphérie à l'extérieur.

Dans l'équation

$$(4.) \qquad \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{1}{n}}[16 + q\varphi(q)]^{\frac{1}{n}},$$

qui est une conséquence de l'équation (2.), développons la seconde partie suivant des puissances entières et positives de q; on obtient pour un nombre entier quelconque n une équation de la forme:

$$(5.)\qquad \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{n}} = 16^{\frac{1}{n}} q^{\frac{1}{n}} \psi_n(q),$$

où $\psi_n(q)$ est une série qui ne s'évanouit pas pour $q=0$ et qui est convergente dans toute l'étendue de $\mathfrak{K}$, parce que $\frac{1}{u}$ n'y devient ni zéro (excepté le point $q=0$), ni infini (pour $u=0$, mod. $q=1$, voir n°. 4).

Posons $n=8$, on a

$$(6.)\qquad \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \psi_8(q),$$

relation que l'on peut transformer dans l'équation connue:

$$(7.)\qquad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,.\,q^{\frac{1}{8}}\,.\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}$$

(*Jacobi*, Fundamenta p. 89)*).

Le développement de η_1 suivant les puissances de q peut s'obtenir de deux manières: Dans l'expression de η_1 en u, contenue dans les équations (*C.*), on peut substituer la valeur de $\frac{1}{u}$ (de l'équation (2.)) et de $\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}$ (de l'équation (5.), pour $n=2$). Ou bien au moyen de l'équation (*J.*) on peut calculer les valeurs des dérivées successives de η_1^2 en fonctions de q, pour $q=0$ et ensuite appliquer le théorème de *Maclaurin*. De ce développement de η_1 et de celui de $u^{\frac{1}{2}}$ qui découle de l'équation (5.) pour $n=-2$, on conclut cette relation:

$$(8.)\qquad K = \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,.\,\eta_1 = \chi(q),$$

où $\chi(q)$ signifie une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de q, convergente à l'intérieur de $\mathfrak{K}$, et telle que $\chi(0)$ est différente de zéro (Voir les équations (3.) du n°. 2 et les équations (*C.*)).

---

*) *M. Hermite,* qui a eu l'obligeance de lire les épreuves du présent mémoire, vient de me faire avec sa sagacité ordinaire la remarque suivante: „N'y aurait-il point lieu d'observer qu'en faisant $x^2 = f(\mathrm{H})$, il résulte de votre analyse que *toutes les solutions* de l'équation $f(\mathrm{H}) = f(\mathrm{H}_0)$ sont données par la formule $\mathrm{H} = \frac{\nu i + \varrho \mathrm{H}_0}{\lambda + \mu i \mathrm{H}_0}$, en insistant sur *l'extrême importance* de ce résultat, pour la détermination des modules singuliers de M. *Kronecker,* et en remarquant que les belles découvertes de l'illustre géomètre, sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'arithmétique, paraissent reposer essentiellement sur cette proposition, dont la démonstration n'avait pas encore été donnée?“ *F.*

Extrayons encore la racine carrée du second membre de l'équation (8.), nous trouvons ainsi un développement convergent à l'intérieur de $\mathfrak{K}$

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\cdots$$

qui est d'accord avec le développement connu (*Jacobi* fundamenta p. 184).

7.

Soit

$$(1.)\qquad J=\int_0^1 \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad J'=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

les intégrales étant prises le long de l'axe réel des x, la racine carrée avec le signe positif, et k étant supposé réel et en valeur absolue inférieur à l'unité.

En employant la même substitution que dans le n°. 1

$$x^2=y,\quad k^2=\frac{1}{u}$$

nous obtenons

$$(2.)\qquad J=\frac{1}{2\sqrt{u}}\int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}},\quad J'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\int_1^u \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}$$

$\sqrt{u}$ étant positive, et les intégrales prises le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée.

Posons

$$(3.)\qquad \zeta_1=\int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}},\quad \zeta_2=\int_1^u \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}};$$

où u se trouve être réel et supérieur à l'unité, et les intégrales doivent être prises le long de l'axe réel des y avec le signe positif de la racine carrée. Nous avons alors:

$$(4.)\qquad J=\frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_1,\quad J'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\zeta_2.$$

Pour définir ζ_1, ζ_2 en fonctions de la variable u sans restriction, nous les exprimons par les fonctions η_1, η_2.

En posant

$$y(y-1)=\psi(y),\quad y(y-1)(y-u)=\varphi(y),$$

on a

$$(5.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} = -\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}+\frac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\frac{y}{\sqrt{\varphi(y)}}-\frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{\psi(y)}{y-u}}$$

et

$$(5^a.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}-\dfrac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]-\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{u-y}} \\ = -\dfrac{\frac{1}{2}}{u-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}} \\ -\dfrac{1}{\psi(u)}\,\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{\dfrac{\psi(y)}{u-y}}-\sqrt{\dfrac{\psi(u)}{u-y}}+\sqrt{\dfrac{u(u-y)}{u-1}}\right]. \end{cases}$$

En intégrant l'équation (5.) entre les limites $y=0$ et $y=1$, nous en tirons

$$(6.)\quad \frac{d\eta_1}{du} = -\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\eta_1+\frac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\zeta_1.$$

D'ailleurs on a

$$\eta_2 = \int_1^u\left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}-\frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]dy+\frac{2}{\sqrt{u}}.$$

Donc, puisque l'expression sous le signe d'intégration s'évanouit pour $y=u$,

$$\frac{d\eta_2}{du} = \int_1^u\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}}-\frac{1}{\sqrt{\psi(u)(u-y)}}\right]dy-u^{-\frac{3}{2}}.$$

Par conséquent, en intégrant l'équation (5^a.) entre les limites $y=1$ et $y=u$, le premier membre devient $\frac{d\eta_2}{du}$, et l'on obtient:

$$(6^a.)\quad \frac{d\eta_2}{du} = -\frac{\frac{1}{2}}{u-1}\eta_2+\frac{\frac{1}{2}}{\psi(u)}\zeta_2.$$

Des équations (6.) et (6^a.) on déduit:

$$(K.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = 2\psi(u)\dfrac{d\eta_1}{du}+u\eta_1, \\ \zeta_2 = 2\psi(u)\dfrac{d\eta_2}{du}+u\eta_2. \end{cases}$$

Remarquons en passant que les équations (K.) donnent immédiatement la relation connue de *Legendre*. Car ayant multiplié la première par η_2, la seconde par η_1, retranchons l'une de l'autre; il en résulte au moyen de l'équation (D.)

$$\zeta_1\eta_2-\zeta_2\eta_1 = -2\pi.$$

En y substituant les valeurs de η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 du n°. 1 et de ce numéro, nous obtenons

$$KJ'-K'J = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est effectivement l'équation de *Legendre*.

En même temps on conclut du raisonnement précédent que cette équation de *Legendre* subsiste pour les fonctions K, K', J, J' de u de même que pour des valeurs des périodes correspondant à une valeur fixe de u.

En outre les équations (K.) font voir que $q\zeta_1^2$, envisagée comme fonction de q, est holomorphe à l'intérieur du cercle $\mathfrak{K}$.

Car du n°. (6.) découle l'équation:

$$\frac{d\eta_1}{du}\psi(u) = -\frac{\pi^2 q}{\eta_1^2}\frac{d\eta_1}{dq}.$$

En y substituant pour η_1^2, $\frac{d\eta_1}{dq}$ les valeurs en fonctions de q, tirées des équations (4.) et (8.) du numéro précédent. on obtient:

$$\frac{d\eta_1}{du}\psi(u) = q^{-\frac{1}{4}}F(q);$$

d'une manière analogue il vient:

$$u\eta_1 = q^{-\frac{1}{4}}F_1(q),$$

où $F(q)$, $F_1(q)$ sont des fonctions de q holomorphes à l'intérieur de $\mathfrak{K}$. Ainsi notre assertion se trouve démontrée.

8.

Soit η une intégrale quelconque de l'équation (A.) et posons:

$$(1.)\qquad \zeta = 2\psi(u)\frac{d\eta}{du} + u\eta,$$

il suit

$$(2.)\qquad \frac{d\zeta}{du} = u\frac{d\eta}{du} + \tfrac{1}{4}\eta$$

et

$$(3.)\qquad 2(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} = -(u+1)\frac{d\eta}{du} - \tfrac{1}{4}\eta.$$

L'élimination de η, $\frac{d\eta}{du}$ fournit:

$$(L.)\qquad 2u(u-1)\frac{d^2\zeta}{du^2} + 2u\frac{d\zeta}{du} - \tfrac{1}{8}\zeta = 0.$$

(Cette équation peut se déduire directement par la méthode que j'ai donnée dans mon mém. t. 71 p. 91.)

Les racines des équations fondamentales et déterminantes de cette équation différentielle sont

pour $u = 0: 0,\ 1$; pour $u = 1: 0,\ 0$; pour $u = \infty: -\frac{1}{4},\ +\frac{1}{4}$.

Posons:

$$(4.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{01}}{du}+uv_{01} = w_{01}, \\ 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_0(u)v_{01})+uH_0(u)v_{01}-2(u-1)v_{01} = P_0(u)u^{-1}w_{01}, \\ P_0(u)u^{-1}w_{01}-w_{01}\log u = w_{02}; \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{11}}{du}+uv_{11} = w_{11}, \\ 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_1(u)v_{11})+uH_1(u)v_{11}+2uv_{11} = P_1(u)w_{11}, \\ P_1(u)w_{11}+w_{11}\log(u-1) = w_{12}; \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} 2u(u-1)\dfrac{dv_{\infty 1}}{du}+uv_{\infty 1} = w_{\infty 1}, \\ 2u(u-1)\dfrac{d}{du}(H_\infty(u)v_{\infty 1})+uH_\infty(u)v_{\infty 1}-2(u-1)v_{\infty 1} = P_\infty(u)uw_{\infty 1}, \\ P_\infty(u)uw_{\infty 1}-w_{\infty 1}\log u = w_{\infty 2}. \end{cases}$$

Alors $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_\infty(u)$ sont des séries ordonnées suivant des puissances entières et positives respectivement de u, $u-1$, $\frac{1}{u}$, et convergentes dans le domaine respectivement de $u=0$, $u=1$, $u=\infty$, et l'on a

$$(7.)\quad P_0(0)=4,\quad P_1(1)=-4\log 2+2,\quad P_\infty(\infty)=-4.$$

Les systèmes fondamentaux d'intégrales de l'équation différentielle (*L.*), appartenant aux racines des équations fondamentales et déterminantes sont respectivement:

$$w_{01},\quad w_{02};\quad w_{11},\quad w_{12};\quad w_{\infty 1},\quad w_{\infty 2};$$

et l'on conclut des équations (*K.*), (*B.*), (*C.*), (*E.*)

$$(M.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = \pi w_{01}+iw_{02}, & \zeta_2 = w_{02}, & \text{dans le domaine de } u=0, \\ \zeta_1 = -w_{12}, & \zeta_2 = \pi w_{11}, & \text{dans le domaine de } u=1, \\ \zeta_1 = \pi w_{\infty 1}, & \zeta_2 = -w_{\infty 2}, & \text{dans le domaine de } u=\infty. \end{cases}$$

Il suit de là que:

$$(8.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = 2i,\quad \zeta_2 = 2,\quad \text{pour}\quad u=0, \\ \lim\zeta_1 = -2+4\log 2-\lim\log(u-1),\quad \zeta_2=\pi,\quad \text{pour}\ u=1, \\ \zeta_1 = 0,\quad \zeta_2=\infty,\quad \text{pour}\quad u=\infty. \end{cases}$$

Posons

$$(9.)\quad \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{J}{J'} = Z,$$

$$(10.)\quad e^{-\pi Z} = s;$$

alors on a:

$$(11.)\quad \begin{cases} Z = i, \quad s = -1, \quad \text{pour} \quad u = 0, \\ \text{la partie réelle de } Z \text{ infinie et positive, } s = 0 \text{ pour } u = 1, \\ Z = 0, \quad s = 1, \quad \text{pour} \quad u = \infty. \end{cases}$$

On conclut des équations (K.) qûe, u décrivant un contour fermé comprenant les points: $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$, ζ_1, ζ_2 se transforment en des fonctions linéaires et homogènes des mêmes quantités et dont les coefficients sont représentés resp. par S_0, S_1, S_∞.

Donc, si l'on désigne par Z_0 une des valeurs de Z pour une valeur quelconque de u, les valeurs résultant des divers chemins parcourus par u seront représentées par la formule:

$$(\alpha.)\quad \frac{\lambda + \mu i Z_0}{\nu i + \varrho Z_0}$$

(comparez la formule analogue (α.) du n°. 4), où λ, μ, ν, ϱ sont des nombres réels et entiers caractérisés dans le n°. 3, et en particulier toutes les valeurs de Z pour $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ sont contenues resp. dans les formules:

$$Z = -\frac{\lambda - \mu}{\nu + \varrho} \cdot i; \quad Z = \text{ou à } + \frac{\mu i}{\varrho}$$

ou à un nombre dont la partie réelle est infinie et positive; $Z = -\frac{\lambda i}{\nu}$.
Ainsi toutes les valeurs de s, *pour* $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$ *ont des modules égaux à l'unité* (excepté la valeur $s = 0$).

9.

On a d'après les formules (M.) et (4.), (5.), (6.) du numéro précédent:

$$(1.)\quad Z = \frac{\pi}{P_0(u)u^{-1} - \log u} + i, \text{ dans le domaine de } u = 0,$$

$$(2.)\quad Z = -\frac{1}{\pi}[P_1(u) + \log(u-1)], \text{ dans le domaine de } u = 1,$$

$$(3.)\quad Z = -\frac{\pi}{P_\infty(u)u - \log u} \text{ dans le domaine de } u = \infty.$$

Pour des valeurs de u très-voisines de $u = 0$ la partie réelle de $P_0(u)u^{-1} - \log u$ diffère très-peu de $\frac{4}{\varrho}\cos\varphi - \log\varrho$, où l'on a posé $\varrho e^{\varphi i}$ au lieu de u; partant son signe dépend de la valeur de $\cos\varphi$, et ainsi dans le voisinage de $u = 0$ la partie réelle de Z dépend aussi de la valeur de $\cos\varphi$.

Au contraire dans le voisinage de $u = 1$ le signe de la partie réelle de Z est positif pour toute valeur de $\cos\varphi$, si l'on pose de même $u-1 = \varrho e^{\varphi i}$.

Enfin dans le voisinage de $u = \infty$, le signe de la partie réelle de Z dépend de la valeur de $\cos\varphi$, en posant $u = \varrho e^{\varphi i}$.

Donc pour un point du voisinage de $u = 0$ et de $u = \infty$ le module de s pourra être tantôt plus grand, tantôt plus petit que l'unité, selon le chemin suivi par la variable u. Au contraire pour les points du voisinage de $u = 1$, le module de s est plus petit que l'unité quel que soit ce chemin.

10.

On déduit de l'équation différentielle (L.), ou aussi directement des équations (K.), au moyen de l'équation (D.):

$$(D'.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d\zeta_1}{du} & \zeta_1 \\ \frac{d\zeta_2}{du} & \zeta_2 \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{u-1};$$

de là

$$(1.)\qquad \frac{dZ}{du} = -\frac{\pi}{(u-1)\zeta_2^2},$$

donc

$$(J'.)\qquad \frac{du}{ds} = \frac{(u-1)\zeta_2^2}{\pi^2 s}.$$

Il s'ensuit de l'équation (2.) du numéro précédent que dans le domaine de $u = 1$:

$$(2.)\qquad s = (u-1)e^{P_1(u)} = (u-1)g(u),$$

où $g(u)$ est holomorphe dans le domaine de $u = 1$, et a la valeur $e^{-4\log 2+2}$ pour $u = 1$.

D'après le théorème cité dans le n°. 6, cette équation conduit à:

$$(3.)\qquad u-1 = e^{4\log 2-2}.s+s^2h(s),$$

où $h(s)$ est holomorphe dans le voisinage de $s = 0$.

Après cela le même raisonnement, par lequel nous sommes parvenu au théorème I. du n°. 6, fournit ce théorème:

Quand on considère dans l'équation

$$(4.)\qquad s = e^{-\pi Z}$$

u comme fonction de s, cette fonction est holomorphe dans un cercle $\mathfrak{L}$ décrit autour de $s = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. En outre dans

aucun des points de l'intérieur de $\mathfrak{L}$ *u n'acquiert une valeur, pour laquelle la fonction* ζ_2 *s'évanouisse. L'équation* (3.) *exprime la fonction u dans toute l'étendue du cercle* $\mathfrak{L}$.

Lorsque la variable u passe le long de l'axe réel de $u=1$ jusqu'à $u=\infty$, il résulte des expressions de ζ_1 et ζ_2, par des intégrales définies (n°. 7) que ces deux fonctions seront réelles et positives. La fonction Z est donc aussi réelle et positive pour les mêmes valeurs de u. Donc le chemin correspondant de s reste tout entier dans l'intérieur de $\mathfrak{L}$ et parvient à un point de la circonférence de ce cercle au moment où u devient infini. Par suite l'inverse doit aussi avoir lieu: il y a au moins un chemin de la variable indépendante s, lequel provient de l'intérieur de $\mathfrak{L}$ et tel qu'on parvient à $u=\infty$, lorsque s arrive à un point de la circonférence. Comme pour ce point $\frac{du}{ds}$ cesse d'être holomorphe, la série (3.) ne représente plus la fonction $u-1$ pour les points de l'extérieur du cercle $\mathfrak{L}$; ou en d'autres termes: $\mathfrak{L}$ est le cercle de convergence de la série (3.).

De la même manière que dans le n°. (5.) à l'égard de la partie réelle de H, on démontre le théorème suivant:

Pour un point quelconque u le signe de la partie réelle de Z est indépendant des circulations que la variable u a faites autour des points $u=0$, $u=1$, $u=\infty$, *lorsqu'elle parvient à ce point.*

Comme d'après le numéro précédent le module de s acquiert dans le voisinage de $u=0$, $u=\infty$ des valeurs tantôt plus grandes, tantôt plus petites que l'unité, il suit que, quand u part de $u=1$ et suit des chemins quelconques, aboutissant en $u=0$ ou $u=\infty$, s partira de $s=0$, traversera la circonférence de $\mathfrak{L}$ et continuera une partie de son chemin à l'extérieur de $\mathfrak{L}$. De là résulte le théorème:

La fonction $u-1$ *de s, définie par l'équation* (4.) *et s'évanouissant pour* $s=0$, *peut être étendue d'une manière continue pour la portion du plan extérieure à la circonférence de* $\mathfrak{L}$. *Les valeurs de u correspondant à des valeurs de s de l'intérieur de* $\mathfrak{L}$ *n'épuisent pas tout le plan de u.*

Pour des valeurs finies de s, dont les modules surpassent l'unité, l'on parvient, parce que $\frac{du}{ds}$ est une fonction holomorphe de u et de s, d'une manière analogue à celle qui a conduit au théorème I. du n°. 6, au théorème suivant:

Si l'on étend d'une manière continue la fonction u définie par l'équation (4.) *en franchissant la circonférence de* $\mathfrak{L}$ *et que l'on reste ensuite à l'extérieur de* $\mathfrak{L}$, *cette fonction est holomorphe dans une partie du plan comprise entre la circonférence du cercle* $\mathfrak{L}$ *et celle d'un cercle décrit autour du même centre avec un rayon quelconque et plus grand que l'unité.*

Elle est donc développable dans toute cette étendue suivant des puissances entières, tant positives que négatives de s.

Heidelberg, novembre 1876.

Ueber die Abbildung $x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$ und die lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung.

(Von Herrn *Holzmüller* in Hagen.)

Die Gleichung eines Kreises um den Punkt e der reellen Axe

$$(X-e)^2+Y^2=c^2, \quad \text{oder} \quad (X+Yi-e).(X-Yi-e)=c^2$$

geht durch vorstehende Abbildung, bei der n ganz, positiv und reell sein mag, über in

$$[(x+yi)^n-e].[(x-yi)^n-e] = c^2,$$

oder, wenn man jede Klammer in ihre Factoren zerlegt:

$$\prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\left[\left(x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)+i\left(y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\left(x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)-i\left(y+e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)\right] = c^2.$$

Wegen der conjugirten Wurzeln gehört zu jedem Factor stets ein solcher, der mit ihm multiplicirt Reelles giebt, so dass man erhält:

$$(1.)\qquad \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\left[\left(x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2+\left(y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2\right] = c^2.$$

Verbindet man aber einen Punkt $x+yi$ mit den n durch $\sqrt[n]{e}$ repräsentirten Punkten, so wird die Länge jeder Verbindungslinie dargestellt durch

$$p = \sqrt{\left(x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2+\left(y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)^2},$$

und wird dies in Gleichung (1.) eingesetzt, so ergiebt sich als Gleichung der dem Kreise entsprechenden Curve:

$$(2.)\qquad p_1.p_2\dots p_n = c.$$

Ueberträgt man das Gesagte auf einen Kreis um den beliebigen Punkt $a+bi$, so ergiebt sich folgender Satz:

Die Abbildung $x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$, wo n ganz, reell und positiv ist, verwandelt den Kreis $r=c$ um den Punkt $a+bi$ in die Curve $p_1.p_2\dots p_n=c$, deren Radii vectores von den durch $\sqrt[n]{a+bi}$ repräsentirten Punkten ausstrahlen.

Für den Fall $n = 2$ entspricht bekanntlich den concentrischen Kreisen ein System confocaler Lemniscaten mit den Brennpunkten $\sqrt{a+bi}$, im allgemeinen Falle erhält man Curven verwandten Charakters, die man als ***Lemniscaten n^{ter} Ordnung*** bezeichnen könnte. Ihre Brennpunkte sind die Ecken eines regelmässigen Polygons.

In ähnlicher Weise wird die Gerade, welche die reelle Axe im Punkte e unter dem Winkel γ schneidet, also die Linie

$$\gamma = \operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X-e},$$

in eine der gleichseitigen Hyperbel nach Gestalt und Gleichung verwandte Curve transformirt.

Bekanntlich ist

$$2i\operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X-e} = \lg\frac{X+Yi-e}{X-Yi-e},$$

also hier:

$$\gamma = \frac{1}{2i}\lg\frac{(x+yi)^n-e}{(x-yi)^n-e} = \frac{1}{2i}\lg\prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\frac{(x+yi)-e^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)}{(x-yi)-e^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)},$$

oder, wegen der conjugirten Wurzeln:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2i}\lg\prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\frac{(x+yi)-e^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)}{(x-yi)-e^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}-i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)}\\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\frac{1}{2i}\lg\frac{\left(x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)+i\left(y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)}{\left(x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)-i\left(y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)},\end{aligned}$$

oder endlich:

$$(3.)\qquad \gamma = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\operatorname{arc\,tan}\frac{y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}}{x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}}.$$

Verbindet man aber wieder einen Punkt $x+yi$ mit sämmtlichen Punkten $\sqrt[n]{e}$, so bilden die Verbindungslinien mit der reellen Axe Winkel ϑ, für welche

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tan}\frac{y-e^{\frac{1}{n}}\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}}{x-e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}}.$$

Setzt man dies in Gleichung (3.) ein, so ergiebt sich als Gleichung der transformirten Curve

$$(4.)\qquad \vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n = \gamma.$$

In der letzten Betrachtung ist stets der Zusatz $\pm m\pi$ vernachlässigt. Die Berechtigung dazu ergiebt sich aus einer einfachen Untersuchung über die Asymptoten der gefundenen Curve.

Ganz allgemein ergiebt sich der Satz:

Die von einem Punkte $a+bi$ ausgehende Gerade, welche mit dem „Radius" dieses Punktes den Winkel $\vartheta=\gamma$ bildet, geht durch die Abbildung $x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$ (n ganz, positiv, reell) über in die Curve $\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n=\gamma$, wobei die ϑ die Winkel sind, welche die von den Punkten $\sqrt[n]{a+bi}$ ausstrahlenden Radii vectores der Curve mit dem „Radius" irgend eines dieser Punkte bilden.

Für $n=2$ sind diese Curven gleichseitige Hyperbeln. Im allgemeinen Falle mögen sie als *Hyperbeln n^{ter} Ordnung* bezeichnet werden.

Das Orthogonalsystem der confocalen Lemniscaten n^{ter} Ordnung ist ein Büschel von Hyperbeln n^{ter} Ordnung durch die n Brennpunkte der Lemniscaten.

Die isogonalen Trajectorien beider Isothermenschaaren haben die Gleichung

$$(5.)\qquad p_1.p_2\dots p_n = c.k^{\vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_n}.$$

Ist ferner $f(r,\vartheta)=0$ die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten, bezogen auf den Punkt $a+bi$ als Centrum und den Radius desselben als Richtungslinie, so geht sie durch unsere Abbildung über in

$$f[(p_1.p_2\dots p_n),\ (\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n)] = 0.$$

Das Kreisbüschel $\varphi-\chi=\gamma$ durch zwei Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i und die orthogonale Kreisschaar $\frac{p}{q}=c$ gehen über in *ein Büschel von Lemniscaten n^{ter} Ordnung durch die Punktgruppen $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1i}$ und in die orthogonale Lemniscatenschaar n^{ter} Ordnung, deren Gleichungen sind:*

$$(6.)\qquad (\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n) = \gamma,$$

$$(7.)\qquad \frac{p_1\cdot p_2\cdots p_n}{q_1\cdot q_2\cdots q_n} = c.$$

Die isogonalen Trajectorien dieser Isothermenschaaren haben die Gleichung

$$(8.)\qquad \frac{p_1\cdot p_2\cdots p_n}{q_1\cdot q_2\cdots q_n} = c.k^{(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\dots+\chi_n)}.$$

So erhält man z. B. folgenden Satz:

Der geometrische Ort für das constante Verhältniss des Productes der von den Ecken eines regelmässigen n-seitigen Polygons ausstrahlenden Radii vectores zu dem Producte der Radii vectores, die von den Ecken eines concentrischen, n-seitigen, gegen das erste irgendwie gedrehten Polygons ausgehen, ist eine Lemniscate n^{ter} Ordnung.

In entsprechender Weise sind die Gleichungen (7.) und (8.) zu deuten.

Für die Uebertragung der *projectivischen Beziehungen* genügt es, zu untersuchen, in welchen Ausdruck das Doppelverhältniss übergeht. Haben die Punkte P, Q, R, S einer von $a+bi$ ausstrahlenden Geraden von diesem Punkte die Entfernungen p, q, r, s, so ist das Doppelverhältniss dargestellt durch

$$\frac{r-p}{r-q} : \frac{s-q}{s-p}.$$

Durch vorliegende Abbildung erhalten wir n Punktquaternionen, die in n Sectoren der Ebene auf den entsprechenden Hyperbelarmen n^{ter} Ordnung liegen. Das neue Doppelverhältniss, durch die von den Punkten $\sqrt[n]{a+bi}$ ausgehenden Radii vectores dargestellt, hat die Form

$$(9.)\quad \frac{r_1.r_2\dots r_n - p_1.p_2\dots p_n}{r_1.r_2\dots r_n - q_1.q_2\dots q_n} : \frac{s_1.s_2\dots s_n - q_1.q_2\dots q_n}{s_1.s_2\dots s_n - p_1.p_2\dots p_n}.$$

Das Doppelverhältniss von vier Strahlen, die durch $a_1+b_1 i$ gehen und gegen den „Radius" dieses Punktes um die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geneigt sind, also

$$(10.)\quad \frac{\sin(ac)\sin(bd)}{\sin(bc)\sin(ad)}, \quad \text{oder} \quad \frac{\sin(\gamma-\alpha).\sin(\delta-\beta)}{\sin(\gamma-\beta).\sin(\delta-\alpha)},$$

geht in das Doppelverhältniss der entsprechenden, sich unter denselben Winkeln schneidenden Hyperbeln n^{ter} Ordnung über. Es kann in der Form (10.) oder mit Hülfe der Radii vectores auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(11.)\quad \frac{\sin[(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n)-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)].\sin[(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n)-(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n)]}{\sin[(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n)-(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n)].\sin[(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n)-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)]}.$$

Die Theorie der vorliegenden Abbildung kann nach dem Gesagten vollständig durchgeführt werden. —

Die Abbildung $x+yi = (X+Yi)^{\frac{m}{n}}$, wo m und n ganz, positiv und reell sind, bietet nichts Neues. Lemniscaten m^{ter} Ordnung mit dem Nullpunkt als Centrum werden in solche n^{ter} Ordnung verwandelt.

Ist der Exponent negativ, so ist vorige Abbildung mit der Transformation durch reciproke Radii vectores vom Nullpunkte aus zu combiniren,

welche z. B. Büschel von Lemniscaten n^{ter} Ordnung durch $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1 i}$ in solche durch $\frac{1}{\sqrt[n]{a+bi}}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1+b_1 i}}$ verwandelt.

Nur bei irrationalem Exponenten schwindet die Einfachheit der geometrischen Betrachtung, da die Anzahl der Brennpunkte unendlich gross wird.

Rollt man einen Sector zum einfachen, allgemeinen Kegel auf, so erhält man auf diesem Isothermenschaaren, die in einfacher Beziehung zu den Kreisschaaren der Kugel stehen und in die Ebene zurückgerollt Lemniscaten n^{ter} Ordnung sind.

Wie man aus der Kreisverwandtschaft eine analoge „lemniscatische Verwandtschaft n^{ter} Ordnung" ableiten kann, darüber vergleiche man meine Abhandlung in der Zeitschrift für Math. u. Phys. XXI. pag. 325 etc., wo der Specialfall $n=2$ vollständig durchgeführt ist.

Hagen, im Januar 1877.

Beweise und Lehrsätze über transitive Gruppen.

(Von Herrn *E. Netto.*)

§. 1.

Angenommen, es sei in der transitiven Gruppe G eine Circularsubstitution h der Primzahlordnung p vorhanden, und es werde $h = (a_1 a_2 a_3 \dots a_p)$ gesetzt. Transformirt man nun h durch alle Substitutionen von G, so erhält man eine Reihe von Substitutionen h, h_1, h_2 ..., welche den Uebergang von den Elementen a_1, a_2, ... a_p zu andern gewähren. Ist ferner, wie wir voraussetzen wollen, G primitiv, so ist es möglich, zu allen Elementen der Gruppe G zu gelangen. Denn wäre dies nicht der Fall, und könnte man nur zu einer geringeren Anzahl kommen, so würden alle Substitutionen von G diese Elemente entweder gleichzeitig in nur andere oder lediglich unter sich umsetzen; G wäre also gegen die Voraussetzung nicht primitiv. Wir wollen jetzt aus den h zwei Substitutionen h, h_1 herausgreifen, die in einigen aber nicht in allen Elementen übereinstimmen. Seien a_1, a_2, ... a_p die in h enthaltenen, b_1, b_2, ... diejenigen aus h_1, welche nicht schon unter den a sich finden. Nehmen wir dann eine solche Potenz h_1^{α} von h_1, dass in derselben zwei der b z. B. b_1, b_2 auf einander folgen, und bilden wir die Transformirte von h durch h_1^{α}, also $h'_1 = h_1^{-\alpha} h h_1^{\alpha}$, so wird in h'_1 das Element b_1 weggefallen sein, und daher wird h'_1 mit h mehr Elemente gemeinsam haben als h_1 mit h. Geht man in derselben Weise fort, so ergeben sich Substitutionen h''_1, h'''_1, ..., die der Reihe nach mehr und mehr Elemente mit h gemeinsam besitzen, bis man zu einer Substitution gelangt, deren Elemente sich nur durch ein einziges von denen der Substitution h unterscheiden. Hier hört die Fortsetzbarkeit der Methode natürlich auf; jene letzte Substitution der Reihe h''_1, h'''_1, ... aber kann sogar derart gewählt werden, dass ein vorgeschriebenes Element b_1 als fremdes zu den a hinzutritt. Ist es nämlich möglich eine solche Potenz von h_1 zu finden, dass sie eine der Elementfolgen $\dots a b_1 b_2 \dots$ oder $a b_1 \dots b_2 b_3 \dots$ enthält, so wird in der Transformirten von h durch diese Potenz b_1 gewahrt sein, während mindestens eins der andern Elemente b fortfällt. Eine solche Potenz ist aber vorhanden. Denn ist $h_2 = (\dots b_1 \dots b_2 \dots)$, wo b_2 das nächste auf b_1 folgende

der Elemente b ist, und ist ferner $h_2^r = (\ldots b_1 b_2 \ldots)$, so könnte nur dann die erste der obigen beiden Elementenfolgen nicht eintreten, wenn $h_2^r = (\ldots b_3 b_1 b_2 \ldots)$, wenn also in h_2 das r^{te} Element vor b_1 wieder ein b wäre. In diesem Falle hätte man aber $h_2^{2r} = (\ldots b_1 \ldots b_3 b_2 \ldots)$; und so würde die zweite der obigen Folgen entstehen, wenn nicht $h_2^{2r} = (\ldots b_4 b_1 \ldots b_3 b_2 \ldots)$, d. h. wenn nicht auch das $2r^{te}$ Element vor b_1 zu den b gehörte. Nimmt man in gleicher Weise die $3r^{te}$ Potenz u. s. f., so zeigt sich, dass auch das $3r^{te}$, $4r^{te}$, ... Element vor b_1 ein b sein muss. Da nun aber die Anzahl der überhaupt in h_1 vorhandenen Elemente eine Primzahl p ist, so würden die auf obige Weise erreichbaren sämmtliche überhaupt vorhandenen Elemente erschöpfen, und so würde h_1 gegen die Voraussetzung mit h kein gemeinsames Element a besitzen, sondern nur Elemente b.

Ist nun $h_0 = (a_1 a_2 \ldots a_{p-1} b_0)$, wo h_0 für h und für das eine der Elemente a bei beliebiger Wahl b_0 gesetzt ist, und hat h_1' mit h_0 genau $p-1$ Elemente gemeinsam, so kann h_1' noch so transformirt werden, dass es gerade $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ enthält. Denn enthielte es b_0 und b_1, so könnte man eine Potenz $h_1'^{\alpha}$ so wählen, dass $h_1'^{\alpha} = (\ldots b_1 b_0 \ldots)$ wäre. Dann enthält die Transformirte von h_0 durch $h_1'^{\alpha}$ nämlich $h_1'^{-\alpha} h_0 h_1'^{\alpha}$ nicht mehr b_0, also nur, wie verlangt wurde, $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, b_1$. Die so erhaltenen Substitutionen wollen wir mit η_1 bezeichnen. Dann kann man von η_1 und h_1 ausgehend zu einer neuen Substitution kommen, welche $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, b_2$ enthält und so fortfahren, bis alle Elemente b von h_1 erschöpft sind. Giebt es nun ausser diesen noch andere Elemente in G, also auch andere Substitutionen $h_2, h_3, \ldots$, so steht h_2 mit mindestens einer der Substitutionen $h_0 = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ durch ein oder mehrere Elemente in Verbindung. Man kann also mit diesen neuen Elementen in gleicher Weise verfahren, und so gelangen wir zu folgendem Resultate:

Lehrsatz. *Enthält eine primitive Gruppe der $p+k$ Elemente a_1, $a_2, \ldots a_{p-1}; b_0, b_1 \ldots b_k$ eine Circularsubstitution p^{ter} Ordnung, wo p eine Primzahl bedeutet, so enthält sie eine Reihe ähnlicher Substitutionen $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_k$ derart, dass η_λ die Elemente $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}; b_\lambda$ enthält. Die a können dabei beliebig gewählt werden.*

Dass die Wahl der a wirklich eine beliebige ist, erhellt leicht. Denn sind dieselben ganz nach Willkür unter den Elementen festgestellt, so sind in irgend einem der h einige derselben enthalten. Diese kann man bei jedem Fortschritte wahren, und wenn dann z. B. η_1 mehr der Ele-

mente a enthält als η_0, dies als erstes h zu Grunde legen. Da auf solche Weise die Zahl der a sich nur vermehren kann, und da man andererseits zu allen Elementen also auch allen a gelangen muss, so giebt es unter den h ein solches, welches $a_1, a_2, \dots a_{p-1}$ enthält.

§. 2.

Es ist nicht schwer den abgeleiteten Satz nach verschiedenen Seiten hin zu verallgemeinern. Enthält nämlich die gegebene primitive Gruppe G vom Grade $g+k$ eine andere zweifach transitive Gruppe h vom Grade g, so kann man in gleicher Weise wie oben eine Reihe zweifach transitiver Gruppen $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_k$ feststellen, welche sämmtlich in $g-1$ Elementen übereinstimmen. Denn die ganze obige Schlussfolgerung beruhte nur darauf, in h_1 eine Substitution mit der Elementenfolge $ab_1b_2\dots$ oder $ab_1\dots b_2b_3$ zu bestimmen; wegen der zweifachen Transitivität von h respective h_1 ist dies aber stets möglich. Die Transformation von h durch diese Substitution aus h_1 liefert eine neue Gruppe h_1', die h ähnlich ist und mit ihr mehr Elemente gemeinsam hat als h_1 mit h. Fährt man in gleicher Weise fort, so erhält man genau wie im vorigen Paragraphen die verlangte Reihe von Gruppen.

Wir nehmen zweitens an, dass die in G enthaltene gegebene Gruppe einfach transitiv ist. Dann könnten möglicherweise Substitutionen mit einer der beiden Elementenfolgen $\dots ab_1b_2\dots$, $ab_1\dots b_2b_3\dots$ überhaupt nicht vorhanden sein. Dies wird aber, wie man unmittelbar erkennt, nur eintreten, wenn h_1 und also auch h nicht primitiv ist, und wenn in h_1 die b zu einem und demselben Systeme der Nichtprimitivität gehören. Es sei also zuerst h_1 primitiv; dann ist auch hier dasselbe Verfahren möglich, und man kommt zu einer Gruppe η_1, die mit h die Elemente $a_1, \dots a_{g-1}$ gemeinsam hat. Nur kann man hier nicht von vorn herein bestimmen, welches der Elemente b zu jenen hinzutreten soll. Da ferner η_1 mit h_1 sicher Elemente gemeinsam hat, so folgt die Existenz einer Gruppe η_2, bei der gleichfalls die Elemente $a_1, \dots a_{g-1}$ vorhanden sind. Kann man hier also auch nicht die Reihenfolge der b festsetzen, so erhält man doch auf diese Art alle, und es wird also trotzdem am Schlussresultate nichts geändert.

Ist jedoch h und damit h_1 nichtprimitiv, und wählt man aus h_1 eine Substitution σ_1 derart, dass σ_1 ein a mit einem b verbindet aber möglichst wenige b enthält, zur Transformation der Gruppe h, so wird die Gruppe $h_1' = \sigma_1^{-1} h \sigma_1$ weniger b enthalten als h_1, wenn σ_1 nicht alle enthielt. Wenn

nun bei h_1 alle b zu demselben Systeme der Nichtprimitivität gehören und wenn bei jeder Verbindung ab sämmtliche b auftreten; wenn ferner mit h bezüglich der zu h_1 fremden Elemente ähnliche Verhältnisse statthaben, so ist eine weitere Reduction nicht möglich.

Sei endlich in der primitiven Gruppe G eine Substitution h vom Grade $p.q$ und der Ordnung p enthalten, so dass h aus q Circularsubstitutionen der Ordnung p zusammengesetzt ist. Dann kann auch hier wegen der Primitivität eine Reihe ähnlicher Substitutionen h_1, h_2, ... aufgestellt werden, welche schon für sich allein alle Elemente transitiv verbinden. Enthält nun h_1 in einem Cyklus mehr als ein gegen die Elemente von h neues, so wird eine passend gewählte Potenz beide auf einander folgen lassen und die Transformation von h durch diese Potenz liefert eine neue Substitution h_1', mit welcher h mehr Elemente gemeinsam hat, als mit h_1. In gleicher Weise kann man so lange fortfahren, bis man zu einer Substitution η_1 kommt, die zu $h = \eta_0$ in der Beziehung steht, dass in jedem Cyklus der einen höchstens ein neues Element vorkommt. Von η_1 kann man durch gleiche Behandlung mit h_1 zu einer neuen Substitution η_2 übergehen u. s. f., bis alle Elemente von h_1 erschöpft sind. Da ferner h_3 mit h_2 einige Elemente gemeinsam hat, so kann man in derselben Art zu neuen Substitutionen η kommen, bis alle Elemente der vorgelegten Gruppe mit $h = \eta_0$ verbunden sind.

Wir fassen die Resultate der bisherigen Ableitungen zusammen.

Lehrsatz I. *Enthält die primitive Gruppe G des Grades $g+k$ eine zweifach-transitive oder eine einfach-transitive primitive Gruppe des Grades g, so enthält sie eine Reihe ähnlicher Gruppen η_0, η_1, ... η_k derart, dass η_λ die Elemente a_1, a_2, ... a_g, b_λ enthält. Die a können dabei beliebig gewählt werden.*

Lehrsatz II. *Enthält die primitive Gruppe G des Grades $g+k$ eine Substitution, die aus q Cyklen der Primzahlordnung p besteht, so enthält sie eine Reihe ähnlicher Substitutionen η, η_1, ... derart, dass jedes η_λ gegen $\eta_{\lambda-1}$ höchstens q neue Elemente, in jedem Cyklus eins, enthält.*

Man könnte leicht eine Erweiterung des letzteren Satzes dahin gehend vermuthen, dass η_λ gegen $\eta_{\lambda-1}$ nur ein fremdes Element enthält, oder dass in jedem System solcher Cyklen von $\eta_{\lambda-1}$, die durch diejenigen von η_λ mit einander verbunden werden, nur ein neues Element auftritt. Ein Beispiel zeigt, dass dies nicht der Fall ist. In der von Herrn *Kronecker* aufgestellten Gruppe des Grades 7 und der Ordnung 168, welche aus den Substitutionen

$(z, az+b)$; $(z, a\theta(z+b)+c)$ gebildet wird, wo $\left(\frac{a}{7}\right)=+1$, also $a=1, 2, 4$; $\theta(z) = -z^2(z^3+1)$; $b = 0, 1, \ldots 6$ ist, und z den Index der Elemente $x_0, x_1, \ldots x_6$ bedeutet, sind 21 Substitutionen

$$(x_0x_1)(x_2x_5), (x_0x_2)(x_1x_5), (x_0x_5)(x_1x_2); \quad (x_0x_1)(x_4x_6), (x_0x_4)(x_1x_6), (x_0x_6)(x_1x_4);$$
$$(x_0x_2)(x_3x_4), \ldots; \ (x_0x_3)(x_5x_6), \ldots; \ (x_1x_2)(x_3x_6), \ldots; \ (x_1x_3)(x_4x_5), \ldots;$$
$$(x_2x_4)(x_5x_6), \quad (x_2x_5)(x_4x_6), \quad (x_2x_6)(x_4x_5)$$

von vier Elementen vorhanden. Hier sieht man unmittelbar, dass der obige Lehrsatz nur in der gegebenen Einschränkung gültig sein kann.

§. 3.

Sind jetzt unter den Voraussetzungen von §. 1 oder §. 2 Lehrsatz I. die $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_k$ aufgestellt, so kann man eine Substitution bilden, welche die $b_0, b_1, \ldots$ in vorgeschriebener Art auf einander folgen lässt. Soll z. B. eine Substitution hergestellt werden, welche die Folge $(b_0b_1b_2)(b_3b_4\ldots)$ enthält, so verfährt man folgendermassen. Es sei $\eta_0=(a_1b_0a_2\ldots)$; dann wählt man eine solche Potenz von η_1, dass in derselben b_1 auf a_2 folgt, also $\eta_1^\alpha=(a_2b_1a_3\ldots)$; ferner eine solche Potenz von η_2, dass in derselben b_2 auf a_3 folgt, also $\eta_2^\beta=(a_3b_2a_4\ldots)$ und endlich eine solche Potenz von η_0, dass in ihr auf a_4 wieder b_0 folgt, also $\eta_0^\gamma=(a_4b_0\ldots)$. Daraus folgt

$$\eta_0\eta_1^\alpha\eta_2^\beta\eta_0^\gamma=(a_1b_0a_2\ldots)(a_2b_1a_3\ldots)(a_3b_2a_4\ldots)(a_4b_0a_5\ldots)=(b_0b_1b_2)(a_1a_5\ldots).$$

Wendet man also jetzt nur noch Substitutionen $\eta_3, \eta_4, \ldots$ an, so erscheint keins der Elemente b_0, b_1, b_2 mehr; der obige Cyklus $(b_0b_1b_2)$ bleibt daher unverändert. Durch jene anderen Substitutionen kann man aber in derselben Weise die weiteren Vorschriften über die Transitivität in Bezug auf $b_3, b_4, \ldots$ erfüllen.

Ist endlich die Gruppe η, wie im ersten Theile des Lehrsatzes I., §. 2 vorausgesetzt wurde, zweifach transitiv, so kann noch eine auf ein a bezügliche Bedingung befriedigt werden. Denn um z. B. $(b_0b_1a_\lambda b_2b_3\ldots)$ herzustellen, wählt man aus η_0 eine Substitution $\sigma_0=(b_0a_0\ldots)$, aus η_1 eine Substitution $\sigma_1=(a_0b_1a_2\ldots)$, aus η_2 ferner $\sigma_2=(a_2a_\lambda b_2a_3\ldots)$, welche die beiden Bedingungen a_2a_λ, $a_\lambda b_2$ erfüllt, und gebraucht von nun ab nur solche Substitutionen, welche a_λ ungeändert lassen, also aus η_3 die Substitution $\sigma_3=(a_\lambda)(a_3b_3\ldots)$ u. s. f. Da nun einerseits $k+1$ Substitutionen resp. Gruppen η vorhanden sind, andererseits die a beliebig gewählt werden können, so ergiebt sich Folgendes:

Lehrsatz. ***Enthält eine primitive Gruppe vom Grade n eine Circularsubstitution der Primzahlordnung p, oder eine einfach-transitive primitive Gruppe des Grades m, oder eine zweifach-transitive Gruppe des Grades $m+1$, so ist die Gruppe mindestens $n-p+1$ respective $n-m+1$ fach transitiv.***

§. 4.

Es ist für das Folgende nothwendig, einen Hülfssatz einzuschalten, der sich übrigens unmittelbar aus dem Theorem II. des Herrn *Sylow* (*Clebsch* Ann. V, 585—594) ergiebt; aber weil gerade die Kenntniss der dort abgeleiteten Resultate beim Lehrsatze des §. 5 nicht vorausgesetzt werden soll, mag hier ein einfacher Beweis des erforderlichen Lemma Platz finden.

Ist die Ordnung einer Gruppe G durch die Primzahl p aber durch keine höhere Potenz derselben theilbar, so giebt es nach dem *Cauchy*schen Satze in G eine Substitution der Ordnung p; es giebt aber in G keine Gruppe von einer Ordnung $p^\lambda\,(\lambda > 1)$, weil sonst nach dem *Lagrange*schen Satze die Ordnung von G durch p^λ theilbar sein würde, was nach der Voraussetzung nicht stattfindet. Sicher giebt es nun in G noch andere Gruppen H_1, H_2, ..., die sämmtlich von der Ordnung p sind; und hinsichtlich dieser behaupten wir: ***Alle Gruppen H_1, H_2, H_3, ... können aus einer beliebigen H_1 durch Transformation mit gewissen Substitutionen von G erhalten werden.*** Denn hat die Substitution g_α aus G die Eigenschaft, kein h_1 aus der Gruppe H_1 in ein h_2 der Gruppe H_2 umzuwandeln, genügt also g_α keiner Gleichung $g_\alpha^{-1}h_1g_\alpha = h_2$, so haben die p^2 Substitutionen $h_1^{(\mu)}g_\alpha h_2^{(\nu)}$, $(\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \dots\ p)$ offenbar dieselbe Eigenschaft; sie sind auch sämmtlich von einander verschieden; denn aus $h_1^{(\mu)}g_\alpha h_2^{(\nu)} = h_1^{(\sigma)}g_\alpha h_2^{(\tau)}$ würde folgen $g_\alpha^{-1}.h_1^{(\sigma)-1}h_1^{(\mu)}.g_\alpha = h_2^{(\tau)}h_2^{(\nu)-1}$, was der Voraussetzung widerspricht. Hat eine andere nicht unter jenen p^2 enthaltene Substitution g_β dieselbe Eigenthümlichkeit, so auch alle $h_1^{(\mu)}g_\beta h_2^{(\nu)}$. Ebenso sind diese neuen p^2 Substitutionen unter sich und von den ersteren verschieden; denn es würde sonst genau wie eben durchgeführt ist, folgen, dass g_β schon unter den ersteren p^2 Substitutionen enthalten sein muss. Man hat also mindestens $2p^2$ Substitutionen derselben Eigenschaft u. s. f. Gäbe es also keine einzige in G, welche ein h_1 in ein h_2 umwandelt, so müssten sie sich sämmtlich in Abtheilungen von je p^2 zusammenfassen lassen; daher müsste, entgegen der Voraussetzung, die Ordnung von G durch p^2 theilbar sein. Sei nun g eine der Substitutionen von G, welche eine Substitution der Gruppe H_1 in eine

solche der Gruppe H_2 umwandelt. Da nun, wenn H_1 die Substitution h_1 enthält, alle anderen in der Form h_1^α dargestellt werden können, und da ebenso h_2^β alle Substitutionen von H_2 enthält, so folgt, dass $g^{-1}H_1 g = H_2$ ist. Denn aus $g^{-1}h_1 g = h_2$ folgt $g^{-1}h_1 g . g^{-1}h_1 g = g^{-1}h_1^2 g = h_2^2$ u. s. f., und damit ist der Satz bewiesen.

§. 5.

Es sei eine primitive Gruppe G gegeben, welche eine Circularsubstitution der Primzahlordnung p enthält. Der Grad von G sei $p+k$. Nach dem Lehrsatze in §. 3 kann man eine Substitution $s = (b_1 b_2)(b_0 a_1 \ldots)$ construiren, welche ausser den angegebenen Elementen b_1, b_2, b_0 der $k+1$ Elemente b_0, b_1, b_2, $\ldots$ b_k nur noch Elemente a enthält. Wir betrachten jetzt die Gruppe H, welche aus allen den in G enthaltenen Substitutionen gebildet ist, die nur die p Elemente b_0, a_1, $\ldots$ a_{p-1} enthalten, zu denen also auch die oben erwähnte Circularsubstitution $\eta_0 = (a_1 a_2 \ldots a_{p-1} b_0)$ gehört. Die Ordnung dieser Gruppe H ist also durch p theilbar, aber auch durch keine höhere Potenz von p, da dieselbe ein Theiler von $1.2.3 \ldots p$ ist. Ferner ist s permutabel zu H, da ja

$$s^{-1}Hs = (b_1 b_2)^{-1}(b_0 a_1 \ldots)^{-1}.H.(b_0 a_1 \ldots)(b_1 b_2) = (b_1 b_2)^{-1}.(b_1 b_2).H = H$$

sein wird. Es muss daher $s^{-1}\eta_0 s = \eta_0'$ d. h. eine andere in H enthaltene, dem η_0 ähnliche Primzahlsubstitution werden. Nach dem vorigen Paragraphen giebt es aber eine Substitution in H, welche η_0' in eine Potenz von η_0 umwandelt. Dies sei h, so dass $h^{-1}\eta_0' h = \eta_0^\lambda$ wird; dann erhält man

$$h^{-1}s^{-1}\eta_0 s h = h^{-1}\eta_0' h = (b_1 b_2)^{-1} t^{-1}.\eta_0.t(b_1 b_2) = \sigma^{-1}.\eta_0 \sigma = \eta_0^\lambda,$$

wo t nur die Elemente b_0, a_1, $\ldots$ a_{p-1} enthält. Es giebt also eine Substitution $\sigma = (b_1 b_2)t$, welche mit der Gruppe η_0, η_0^2, $\ldots$ permutabel ist, und es besitzt t die Form $\eta_0^\alpha.\tau^\beta$, wo τ bekanntlich eine Circularsubstitution des Grades $p-1$ bedeutet; folglich ist in H auch die Substitution $\sigma' = (b_1 b_2)\tau^\beta$ vorhanden, wo τ eins der Elemente z. B. b_0 nicht mehr enthält. In gleicher Weise giebt es eine Substitution $\sigma_1' = (b_2 b_3)\tau^\gamma$ in der Gruppe G und also auch

$$[(b_1 b_2)\tau^\beta]^{-1}[(b_2 b_3)\tau^\gamma]^{-1}.[(b_1 b_2)\tau^\beta][(b_2 b_3)\tau^\gamma] = (b_1 b_2 b_3).$$

Hieraus folgt, dass G die Circularsubstitutionen dritter Ordnung enthält, die aus den b gebildet werden können, und da man die b selbst willkürlich wählen kann, so enthält G alle Circularsubstitutionen dritter Ordnung und damit die alternirende Gruppe.

Bei dieser Beweisführung ist von vorn herein vorausgesetzt, dass k mindestens gleich 3 sei: denn sonst wären die nothwendigen Substitutionen $(b_1 b_2)(b \ldots)$ und $(b_2 b_3)(b \ldots)$ nicht herzustellen gewesen.

Es ergiebt sich also Folgendes:

Lehrsatz. *Ist eine Gruppe vom Grade $p+k$ mehr als k-mal transitiv, oder enthält eine primitive Gruppe vom Grade $p+k$ eine Circularsubstitution der Primzahlordnung p, so enthält, wenn $k>2$ ist, G die alternirende Gruppe der $p+k$ Elemente.*

Hinsichtlich der Literatur der eben behandelten Sätze sind die Arbeiten des Herrn *C. Jordan:* Traité etc. §. 398. 399: Note C: — *Liouville* Journal (2.) XVI, 1—20: — Bulletin de la Société Math. de France I. 40—71, 175—221 sowie die des Herrn *L. Sylow*, *Clebsch* Ann. V. 585—594 anzuführen.

§. 6.

Die in den nächstfolgenden Paragraphen angestellten Untersuchungen stützen sich auf einen von Herrn *C. Jordan* (*Liouville* Journal (2.) XVII, 351) mitgetheilten Satz, den wir (mit Erweiterung der Bedeutung einer Definition) nebst dem dort gegebenen Beweise der Vollständigkeit halber hier wiederholen.

Benennen wir solche Substitutionen, welche genau r Elemente umsetzen: *Substitutionen r^{ter} Klasse,* also auch die Substitution Eins entsprechend *Substitution 0ter Klasse* und bezeichnen wir die in einer Gruppe befindliche Zahl der Substitutionen r^{ter} Klasse mit N_r, so ergiebt sich: Jede transitive Gruppe G des m^{ten} Grades hat mindestens $m-1$ Substitutionen m^{ter} Klasse. Bilden nämlich die Substitutionen, die das Element a nicht enthalten, die Gruppe H_a der Ordnung N, so ist

$$N = N_{m-1} + N_{m-2} + \cdots + N_x + \cdots + N_0.$$

Die Gruppen H_b, H_c, ... welche in G enthalten sind und die Elemente b_1 respective c_1 ungeändert lassen, können durch Transformation aus H_a erhalten werden und haben daher entsprechend N_x Substitutionen x^{ter} Klasse. Aber nicht alle mN_x Substitutionen sind von einander verschieden, die den verschiedenen m Gruppen H_a, H_b, ... angehören. Da nämlich jede derselben $m-x$ Elemente ungeändert lässt, so gehört sie zugleich $m-x$ Gruppen an; es existiren daher in der Gruppe G nur $\frac{m}{m-x} N_x$ verschiedene Substitutionen x^{ter} Klasse. Die Anzahl X aller in den m Gruppen H_a, H_b, ... enthaltenen Substitutionen, mit anderen Worten die Anzahl aller Substi-

tutionen von G, die nicht der höchsten Klasse angehören, ergiebt sich hieraus

$$X = mN_{m-1} + \frac{m}{2}N_{m-2} + \frac{m}{3}N_{m-3} + \cdots + \frac{m}{m-x}N_x + \cdots + 1.N_0.$$

Da aber G als transitive Gruppe m-mal so viel Substitutionen enthält, als die Anzahl derer ist, die ein beliebiges Element a ungeändert lassen, d. h. mN, so wird die Anzahl Y der Substitutionen m^{ter} Klasse durch die Gleichung

$$(A.) \qquad Y = mN - X = m\left(\tfrac{1}{2}N_{m-2} + \tfrac{2}{3}N_{m-3} + \cdots + \frac{m-x-1}{m-x}N_x + \cdots + \frac{m-1}{m}N_0\right)$$

gegeben. Es ist N_0 gleich eins; daher Y mindestens gleich $m-1$.

§. 7.

Wir wollen bei der transitiven Gruppe G von m Elementen voraussetzen, dass die Substitutionen der m^{ten} Klasse schon für sich allein ein transitives System geben, d. h. dass zwei beliebige Elemente a und b stets durch solche Zwischenglieder $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ verbunden werden können, dass a und α_1 in einem Cyklus einer Substitution m^{ter} Klasse vorkommen, ebenso α_1 und α_2; α_2 und α_3; ... α_n und b. Unter dieser Annahme bilden wir aus allen Substitutionen der m^{ten} Klasse eine neue Gruppe G', welche dann gleichfalls transitiv ist, und für welche daher die Gleichung $(A.)$ gilt. Haben nun N', N'_x, Y' für G' dieselbe Bedeutung, wie die entsprechenden Buchstaben für G, so ist

$$(A'.) \qquad Y' = mN' - X' = m\left(\tfrac{1}{2}N'_{m-2} + \cdots + \frac{m-x-1}{m-x}N'_x + \cdots + \frac{m-1}{m}N'_0\right).$$

Nun ist G' in G enthalten, so dass $N'_x \leqq N_x$ sein muss; andererseits enthält G' alle Substitutionen höchster Klasse von G, so dass $Y' = Y$ ist. Die Differenz von $(A.)$ und $(A'.)$ liefert daher

$$0 = \tfrac{1}{2}(N_{m-2} - N'_{m-2}) + \tfrac{2}{3}(N_{m-3} - N'_{m-3}) + \cdots + \frac{m-x-1}{m-x}(N_x - N'_x) + \cdots + \frac{m-1}{m}(N_0 - N'_0).$$

Keine der Klammern kann negativ sein; daher sind alle gleich Null und für $x < m-1$ erhält man $N'_x = N_x$.

Lehrsatz I. ***Bildet man aus den Substitutionen m^{ter} Klasse der Gruppe G vom Grade m eine Gruppe G', so können sich beide Gruppen nur in den Substitutionen $(m-1)^{ter}$ Klasse von einander unterscheiden, falls G' transitiv ist.***

Lehrsatz II. ***Stimmen zwei transitive Gruppen in den Substitutionen der höchsten Klasse überein, und sind diese Substitutionen allein schon zur***

Transitivität ausreichend, so können sich beide Gruppen nur in den Substitutionen der nächst niedrigen Klasse unterscheiden. — Dies ergiebt sich leicht, wenn man beide Gruppen G und G_1 mit der aus den Substitutionen höchster Klasse gebildeten Gruppe $G' = G_1'$ vergleicht.

Wir untersuchen jetzt die Tragweite jener den aufgestellten Lehrsätzen zu Grunde gelegten Bedingung. Hier stellt es sich sogleich heraus, dass alle doppelt transitiven Gruppen dieselbe von selbst erfüllen. Denn ist $s_1 = (a_1 a_2 \ldots)$ eine Substitution m^{ter} Klasse, so giebt es eine solche $(m-1)^{\text{ter}}$ Klasse $t_r = (a_1)(a_2 a_r \ldots)\ldots$, welche a_1 ungeändert lässt und a_r auf a_2 folgen lässt. Dann ist $s_r = t_r^{-1} s_1 t_r = (a_1 a_r \ldots)$, d. h. es giebt Substitutionen m^{ter} Klasse, die auf a_1 ein beliebiges anderes Element a_r folgen lassen. Zugleich erhellt, dass in zweifach transitiven Gruppen die Zahl Y der Substitutionen m^{ter} Klasse ein Vielfaches von $m-1$ ist. Gäbe es nämlich ausser den durch die Transformation von s_1 durch $t_1 = 1,\ t_3,\ t_4, \ldots t_m$ erhaltenen Substitutionen noch eine neue m^{ter} Klasse $\sigma = (a_1 a_u \ldots)$, so würde $s_1' = t_u^{+1} \sigma t_u^{-1} = (a_1 a_2 \ldots)$ von s_1 verschieden sein, weil sonst $t_u^{-1} s_1 t_u = s_2$ wäre. Transformirt man daher s_1' wie oben s_1 durch $1,\ t_3,\ t_4, \ldots t_m$, so ergeben sich $m-1$ neue von einander und von den ersten verschiedene Substitutionen, so dass die Zahl aller, wenn sie grösser als $m-1$ ist, mindestens $2(m-1)$ sein muss. Sind hiermit noch nicht alle Substitutionen m^{ter} Klasse erschöpft, so können wir in gleicher Weise fortfahren.

Lehrsatz III. *Die Zahl der Substitutionen m^{ter} Klasse einer zwei- oder mehrfach transitiven Gruppe vom Grade m ist durch $m-1$ theilbar.*

Lehrsatz IV. *Stimmen zweifach-transitive Gruppen in den Substitutionen der höchsten Klasse überein, so können sie sich nur in den Substitutionen der nächst niedrigen Klasse unterscheiden.*

Lehrsatz V. *Stimmt eine zweifach-transitive Gruppe in den Substitutionen der höchsten Klasse mit denen einer anderen Gruppe überein, so können sich beide nur in den Substitutionen der nächst niedrigen Klasse unterscheiden.*

In den beiden letzten Lehrsätzen hätte man, wie es im dritten geschehen ist, die Ausdehnung auf mehr als zweifach-transitive Gruppen machen können. Hier tritt aber noch ein besonderer Umstand ein. Ist nämlich G zweifach-transitiv, so ist H_a noch einfach-transitiv, es braucht aber G' nur einfach transitiv zu sein, und so kann H_a' intransitiv werden. Dies ist der Grund der möglichen Differenz zwischen G und G'; dass diese übrigens auch in der That eintritt, zeigt das Beispiel der Gruppen:

$G = 1;\ (a_0 a_1)(a_2 a_3),\ (a_0 a_2)(a_1 a_3),\ (a_0 a_3)(a_1 a_2);\ (a_1 a_2 a_3),\ (a_1 a_3 a_2);\ (a_0 a_1 a_2), \ldots$
und

$$G' = 1;\ (a_0 a_1)(a_2 a_3),\ (a_0 a_2)(a_1 a_3),\ (a_0 a_3)(a_1 a_2).$$

Ist aber G dreifach-transitiv, so ist H_a zweifach und die Gruppe $H_{a,b}$ derjenigen Substitutionen von G, welche die Elemente a, b ungeändert lassen, einfach-transitiv. Es ist aber $H_{a,b}$ mit $H'_{a,b}$ nach unseren obigen Sätzen identisch. Stellt man nun für H_a und für H'_a die Gleichungen auf, welche (*A.*) entsprechen, so stimmen diese in den rechten Seiten überein; daher ist $Y = Y'$; H_a und H'_a haben gleichviel Substitutionen höchster Klasse, folglich auch G und G' gleichviele der $(m-1)^{\text{ten}}$ Klasse, und da H' in H enthalten ist, und beide in den Substitutionen der übrigen Klassen übereinstimmen, so ist überhaupt H' mit H identisch, und so ergiebt sich

Lehrsatz VI. ***Stimmt eine drei- oder mehrfach-transitive Gruppe mit einer anderen Gruppe in den Substitutionen höchster Ordnung überein, so sind beide identisch.***

§. 8.

Wir betrachten nun die einfach-transitiven Gruppen. Gesetzt die Substitutionen m^{ter} Klasse $s_1, s_2, \ldots s_\alpha, \ldots$ bilden kein transitives System, so seien $a_1, a_2, \ldots a_\pi;\ b_1, b_2, \ldots b_\varrho;\ c_1, c_2, \ldots c_\sigma; \ldots$ die einzelnen durch die s_α zu je einem System verbundenen Elemente. Nun muss es, da G transitiv ist, eine Substitution $t_1 = (a_1 b_1 \ldots)\ldots$ geben; transformiren wir die s durch t_1, so müssen, damit nicht doch ein a mit einem b oder c in Verbindung kommt, alle a zugleich in alle b oder alle c u. s. w. übergehen, d. h. es ist $\pi = \varrho = \sigma = \cdots$. Gäbe es zwei Elemente der einen Reihe, auf die durch eine Substitution u zwei andere nicht derselben Reihe angehörige Elemente folgten, z. B. $u = (\ldots a_1 b_1 \ldots a_2 c_1 \ldots)\ldots$ oder $u_1 = (\ldots a_1 b_1 \ldots)$ $(\ldots a_2 c_1 \ldots)\ldots$, so könnten erstens a_1 und a_2 in demselben Cyklus eines s_α vorkommen. Dann wäre $s_\alpha = (a_1 \ldots a_2 \ldots)$ und $s_\beta = u^{-1} s_\alpha u = (b_1 \ldots c_1 \ldots)$; dies ist aber nicht möglich, weil s_β gleichfalls zur m^{ten} Klasse gehört, und hier die b von den c getrennt sind. Ferner könnten a_1 und a_2 verschiedenen Cyklen angehören; dann müsste sich nach früheren Festsetzungen eine derartige Reihe von Substitutionen aufstellen lassen, dass a_1 und a_2 transitiv verbunden wären, also

$$s_\alpha = (a_1 \ldots a_3 \ldots)(a_2 \ldots);\ s' = (a_3 \ldots a_4 \ldots)\ldots;$$

$$s'' = (a_4 \ldots a_5 \ldots)\ldots; \ldots;\ s^{(\nu-1)} = (a_{\nu+1} \ldots a_{\nu+2} \ldots)\ldots;\ s^{(\nu)} = (a_{\nu+2} \ldots a_2 \ldots)\ldots$$

Nach dem eben Bewiesenen muss aber u auf a_1 und a_3 Elemente desselben Systems folgen lassen, da beide in s_α demselben Cyklus angehören; ebenso auf a_3 und a_4, da beide in s' demselben Cyklus angehören, u. s. f. So erkennt man, dass u auf alle Elemente $a_1, a_2, \ldots a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, a_2$ Elemente ein und desselben Systems muss folgen lassen, d. h. dass $u = (a_1 b_1 \ldots)(a_2 b_2 \ldots)\ldots$ oder $= (a_1 b_1 \ldots a_2 b_2)\ldots$ ist. Auf Elemente einer Reihe lassen also die Substitutionen von G stets wieder Elemente derselben Reihe folgen, folglich ist die Gruppe nicht-primitiv.

Die aufgestellte Bedingung ist also höchstens für nicht-primitive Gruppen nicht erfüllt. Das im vorigen Paragraphen gewählte zweite Beispiel zeigt aber, wie jene Bedingung auch hier erfüllt sein kann; und dass dies auch wirklich stets der Fall sei, lässt sich folgendermaassen nachweisen.

Nach dem soeben Erläuterten bilden die Elemente, welche durch die s in Zusammenhang gebracht werden, ein oder mehrere Systeme der Nicht-Primitivität der Gruppe G. Es wäre also nur nachzuweisen, dass diese Systeme selbst mit einander in Verbindung gebracht werden können. Wir fassen nun die Elemente $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots; \ldots$ in die Klassen $A; B; C; \ldots$ zusammen. Dann hängt mit der Gruppe G der $a, b, c, \ldots$ eine andere G_1 der Elemente $A, B, C, \ldots$ derart zusammen, dass wenn eine Substitution von G auf die Elemente der Klasse A die der Klasse B folgen lässt, die entsprechende Substitution aus G_1 auf das Element A das Element B folgen lässt und umgekehrt. Gehen in einer Substitution von G die Elemente der Klasse A in sich selbst über, so fällt in der entsprechenden Substitution von G_1 das Element A aus. Den Substitutionen höchster Klasse in G_1 entsprechen solche der höchsten Klasse in G. Denn wenn in einer Substitution von G_1 das Element A wirklich auftritt, so werden in der entsprechenden von G alle $a_1, a_2, \ldots$ durch andere Elemente ersetzt. Ferner ist G_1 transitiv, da G es ist; es enthält also nach §. 6 Substitutionen höchster Klasse. Endlich hat G_1 weniger Elemente als G. Ist nun G_1 primitiv, so folgt, dass die $A, B, \ldots$ durch die Substitutionen höchster Klasse mit einander verbunden werden, also in G auch die a mit den $b, \ldots$. Ist aber G_1 noch nicht primitiv, so wäre der verlangte Satz nur für diese Gruppe von weniger Elementen zu beweisen. Geht man daher in derselben Art weiter fort, so ergiebt sich der Satz für G_1, wenn die nächste Gruppe G_2 primitiv ist, und da man offenbar durch weitere Zu-

sammenfassung der $A, B, C, \ldots$ schliesslich zu einer primitiven Gruppe gelangt, so ist die Behauptung auch für G bewiesen.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so ergiebt sich:

Lehrsatz I. ***In jeder nicht primitiven Gruppe giebt es Substitutionen, die alle Systeme untereinander vertauschen.***

Lehrsatz II. ***In jeder transitiven Gruppe bilden bereits die Substitutionen höchster Klasse ein transitives System.*** — Es ist daher die Bedingung der Sätze I. und II. in §. 7 stets erfüllt und jener zweite lautet jetzt:

Lehrsatz III. ***Stimmt eine transitive Gruppe G mit einer anderen Gruppe G' in den Substitutionen höchster Klasse überein, so können sie sich nur bei ein- und zweifacher Transitivität von G unterscheiden. Dann brauchen die Substitutionen der zweithöchsten Klasse nicht übereinzustimmen. Bei zweifach-transitiven Gruppen geschieht dies jedoch nur, wenn die aus G durch Unterdrückung eines Elements entstehende Gruppe nicht-primitiv ist.***

Der letzte Zusatz muss noch begründet werden. Unterdrückt man in G und G' dasselbe Element, so erhält man zwei einfach-transitive Gruppen H und H', welche sich in den Substitutionen höchster Klasse unterscheiden. Die beiden gemeinsame Gruppe sei H_1. Dann ist H_1 nicht mehr transitiv. Denn wäre dies der Fall, und wäre $s=(a_2a_1\ldots)\ldots$ eine H aber nicht H_1 angehörige Substitution, so gäbe es in H_1 ein $\sigma_1=(a_1a_2\ldots)$ also in H eine Substitution $s.\sigma_1=(a_2)\ldots$, die nicht mehr der höchsten Ordnung angehört, also in H_1 enthalten ist. $s.\sigma_1=\sigma_2$ zeigt aber, dass $s=\sigma_2.\sigma_1^{-1}$ entgegen der Annahme zu H_1 gehören würde. Es theilen sich daher die Elemente in Gruppen $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; \ldots$ derart, dass die einzelnen a und auch nur diese durch H_1 verbunden sind, u. s. w. H darf in den nicht zu H_1 gehörigen Substitutionen s also nur die einzelnen Gruppen mit einander verbinden. Gäbe es nun ein $s_1=(a_1a_3\ldots)(a_2b_1\ldots)\ldots$ oder ein $s_2=(a_1b_1\ldots)(a_2c_1\ldots)\ldots$, so würde $\sigma=(a_1a_2\ldots)\ldots$ durch s_1 oder s_2 transformirt ein a mit einem b oder ein b mit einem c verbinden. Beides ist unmöglich; also lässt jedes s auf Elemente einer Gruppe Elemente derselben Gruppe folgen, d. h. H ist nicht-primitiv. —

Nach dem Resultate des Lehrsatzes II. liegt die Frage nahe, ob die Substitutionen höchster Klasse nicht so beschaffen seien, dass sie auf ein beliebiges Element alle anderen $n-1$ Elemente folgen lassen, besonders da man weiss, dass mindestens $n-1$ Substitutionen höchster Klasse be-

stehen. Gleichwohl ist dies nicht der Fall. In der Gruppe der Ordnung 72, welche aus den Substitutionen

$$s_1 = (a_0 a_3 a_6 a_9)(a_1 a_4 a_7 a_{10})(a_2 a_5 a_8 a_{11}) \,;$$

$$t_1 = (a_0 a_1 a_2)(a_3 a_4 a_5)(a_6 a_7 a_8) \,; \quad t_2 = (a_3 a_4 a_5)(a_6 a_8 a_7)(a_9 a_{10} a_{11})$$

entspringt, giebt es keine Substitutionen, die zwei demselben Cyklus eines t angehörenden Elemente auf einander folgen lassen. Dass diese Gruppe gleichzeitig keine reguläre Substitution enthält (vgl. *Sylow*, *Clebsch* V. 585), ist nicht zufällig; doch denke ich erst an anderer Stelle auf diesen Zusammenhang näher einzugehen.

Berlin, den 6. November 1876.

Zur Elektrodynamik.

(Von Herrn *Hermann Grassmann* in Stettin.)

Das Gesetz über die gegenseitige Einwirkung zweier Stromtheile, welches ich im Jahre 1845 in *Poggendorffs* Annalen Bd. 64 S. 1 ff. im Gegensatze gegen das *Ampère*sche Gesetz als das muthmasslich richtige aufstellte, hat durch die neuesten bahnbrechenden Arbeiten von Herrn *Clausius*, namentlich durch seine Abhandlung in diesem Journal Bd. 82 S. 85 ff. nicht bloss eine neue Stütze, sondern, man kann sagen, eine sichere Begründung gefunden. In der That stimmt das Kraftgesetz für Stromelemente, wie Herr *Clausius* es S. 130 der erwähnten Abhandlung aus seiner allgemeinen Theorie ableitet, mit dem von mir a. a. O. dargestellten Gesetze genau überein. Da Herr *Clausius*, dem meine oben erwähnte Abhandlung offenbar entgangen war, diese Uebereinstimmung in seinen Arbeiten (vergl. noch *Poggendorffs* Annalen Bd. 156 S. 657; Bd. 157, S. 489 und Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens Bd. 33) nicht erwähnt, so will ich sie hier kurz erörtern und daran einige, wie ich glaube, nicht unwichtige Folgerungen knüpfen.

Es ist äusserst leicht, die Uebereinstimmung beider Gesetze durch die in meinen Ausdehnungslehren (von 1844 u. 1862) behandelte Analysis nachzuweisen; aber, da ich nicht voraussetzen darf, dass den Lesern die Gesetze dieser Analysis geläufig sind, so stütze ich mich zunächst nur auf die Sätze der gewöhnlichen Analysis, namentlich hier auf den Satz, dass, wenn a_1, a_2, a_3 die senkrechten Coordinaten und a die Länge einer Strecke, und b_1, b_2, b_3 die entsprechenden Coordinaten und b die Länge einer zweiten Strecke sind, dann der Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen beider Strecken, den ich nach hergebrachter Weise mit $\cos(ab)$ bezeichne,

$$\cos(ab) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{ab}$$

ist. Sind nun bei senkrechtem Coordinatensystem dx', dy', dz' die Coordinaten und ds' die Länge eines Stromelementes, dx, dy, dz die Coordinaten und ds die Länge eines zweiten Stromelementes, X, Y, Z die Coordinaten der Kraft, mit der das erstgenannte Element auf das zweite wirkt, sind

ferner x', y', z' die Coordinaten des Anfangspunktes des ersten, x, y, z die Coordinaten des Anfangspunktes des zweiten Elementes, also $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ die Coordinaten der Strecke, die von dem erstgenannten Anfangspunkte nach dem letzten gezogen wird, und ist r die Länge dieser Strecke, also $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2$, sind ferner i und i' die beiden Stromintensitäten, ε der Winkel zwischen den beiden Stromelementen und k ein constanter Zahlenfactor, so ist nach *Clausius* a. a. O. S. 130

$$(1.)\qquad X = kii'\,ds\,ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right).$$

Nun ist

$$d\frac{1}{r}=-\frac{r\,dr}{r^3}=-\frac{d(r^2)}{2r^3}=-\frac{d[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}{2r^3}.$$

Also ist

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-\frac{x-x'}{r^3},\quad \frac{d\frac{1}{r}}{ds}ds=-[(x-x')\,dx+(y-y')\,dy+(z-z')\,dz]:r^3.$$

Ferner ist

$$\cos\varepsilon = (dx.dx'+dy.dy'+dz.dz'):ds.ds'.$$

Diese Werthe in (1.) eingesetzt, erhält man

$$X=-\frac{kii'}{r^3}\{(x-x')(dx.dx'+dy.dy'+dz.dz')-[(x-x')dx+(y-y')dy+(z-z')dz]dx'\}$$

und entsprechend sind die Ausdrücke für Y und Z. Nimmt man die z-Axe senkrecht gegen die Ebene an, in welcher r und ds' liegen, so wird $z-z'=0$ und $dz'=0$, also auch $Z=0$. Wir können daher die genannte Ebene die Wirkungsebene nennen; die Formel für X wird dann

$$X = -\frac{kii'}{r^3}\{(x-x')(dx\,dx'+dy\,dy')-[(x-x')\,dx+(y-y')\,dy]\,dx'\}$$

und entsprechend für Y. Nun sei, wie in meiner Abhandlung *Pogg.* 64 S. 9 das Product $i'ds'$ mit a, das Product ids mit b, und die (senkrechte) Projection von b auf die Wirkungsebene mit b_1 bezeichnet, ferner sei der Winkel

$$\angle ra=\alpha,\quad \angle rb_1=\beta,\quad \angle b_1a=\gamma$$

gesetzt, so dass also

$$\alpha=\angle rb_1+\angle b_1a=\beta+\gamma$$

ist. Man nehme die y-Axe in der Richtung b_1, und die x-Axe in der dagegen senkrechten, in der Wirkungsebene liegenden Richtung c an, und zwar so,

dass $\angle b_1 c = +90^0$ ist. Dann sind also $i'dx'$ und $i'dy'$ die Coordinaten von a, idx und idy die von b, also

$$\cos\gamma = \cos(b_1 a) = \frac{ii'(dx\,dx' + dy\,dy')}{ab_1}$$

und

$$\cos\beta = \cos(r b_1) = \frac{i(x-x')dx + i(y-y')dy}{rb_1}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so wird

$$X = -\frac{k}{r^3}[(x-x')ab_1\cos\gamma - i'dx'rb_1\cos\beta],$$

$$Y = -\frac{k}{r^3}[(y-y')ab_1\cos\gamma - i'dy'rb_1\cos\beta].$$

Nun ist $y-y'$ die Projection von r auf b_1, also gleich $r\cos(rb_1) = r\cos\beta$, und $i'dy'$ die Projection von a auf b_1, also gleich $a\cos(b_1 a) = a\cos\gamma$, also

$$Y = -\frac{kab_1}{r^2}(\cos\beta\cos\gamma - \cos\gamma\cos\beta) = 0.$$

Ferner ist $x-x'$ die Projection von r auf c, also gleich

$$r\cos(rc) = r\cos(rb_1 + b_1 c) = r\cos(90+\beta) = -r\sin\beta$$

und $i'dx'$ ist die Projection von a auf c, also gleich

$$a\cos(ac) = a\cos(ab_1 + b_1 c) = a\cos(b_1 c - b_1 a) = a\cos(90^0 - \gamma) = a\sin\gamma,$$

also

$$X = \frac{kab_1}{r^2}(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) = \frac{kab_1}{r^2}\sin(\beta+\gamma),$$

also

$$(2.)\qquad X = \frac{kab_1}{r^2}\sin\alpha.$$

Dieser Ausdruck stellt, da Y und Z Null sind, die ganze Kraft dar. Er ist mit dem Ausdrucke, den ich in *Pogg.* 64. S. 9 Formel 4 mitgetheilt habe, identisch, nur dass k, dessen Werth von der Annahme der Einheiten abhängig ist, dort selbst als Einheit gesetzt war.

Es gewinnt aber diese Formel (2.) durch das von Herrn *Clausius* erwiesene Grundgesetz eine ganz neue Bedeutung. Sie stellt nun nicht mehr eine Hypothese dar, welcher andere Hypothesen vielleicht mit gleicher Berechtigung zur Seite gestellt werden können, sondern ergiebt sich nach der *Clausius*schen Darstellung als nothwendig. Um dies zu zeigen und daran noch andere Folgerungen zu knüpfen, will ich hier den Gang der *Clausius*schen Darstellung kurz zur Anschauung bringen. Herr *Clausius* weist nach,

dass das Grundgesetz, welches der Begründer einer einheitlichen Theorie der Elektrodynamik, Herr *W. Weber*, aufgestellt hat, nur unter *der* Voraussetzung mit der Erfahrung im Einklange ist, dass sich in jedem galvanischen Strome die positive und negative Elektricität mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Er zeigt namentlich, dass, wenn in einem galvanischen Strome die entgegengesetzten Elektricitäten sich mit ungleicher Geschwindigkeit bewegen (z. B. die negative ruht), dann bei Zugrundelegung des *Weber*schen Gesetzes der constante Strom auf ruhende Elektricität vertheilend wirken müsse; was der Erfahrung widerspricht. Ich bemerke, dass man diesen Nachweis auf eine höchst elementare Weise vermittelst eines linearen Stromes führen kann, der aus zwei concentrischen Kreisbogen und zwei geraden Strecken besteht, wenn nämlich das gemeinsame Centrum der beiden Kreisbogen in dem Punkte liegt, in welchem die Elektricität ruht, und die beiden Strecken verlängert durch denselben Punkt gehen. In diesem Falle zeigt der blosse Anblick der *Weber*schen Formel

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

dass der positive Strom (abgesehen von der statischen Wirkung, die sich gegen die des negativen stets aufhebt) auf die ruhende positive Elektricität eine anziehende durch die Mitte des Stromes gehende Wirkung übt, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit $\left[\frac{dr}{dt}\right]$ proportional ist, während die negative Elektricität ebenso stark abgestossen wird, dass hingegen der negative Strom die Wirkungen in entgegengesetztem Sinne übt, aber so, dass diese Wirkungen dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die negative Elektricität strömt, proportional sind. Die Gesammtwirkung ist also nur dann Null, wenn beide Geschwindigkeiten gleich gross sind, in jedem anderen Falle müsste eine Vertheilung der ruhenden Elektricität im Widerspruche mit der Erfahrung Statt finden. Das Entsprechende weist Herr *Clausius* für das *Riemann*sche Grundgesetz nach. Beide würden also nur für den Fall mit der Erfahrung übereinstimmen, wenn sich annehmen liesse, dass in jedem galvanischen Strome positive und negative Elektricität mit *gleicher* Geschwindigkeit (nach entgegengesetzten Richtungen) strömten. Diese Annahme ist jedoch nicht gestattet, da z. B. in Elektrolyten die Elektricitäten sich mit den Ionen bewegen, und diese im Allgemeinen ungleiche Geschwindigkeit besitzen.

Nun geht Herr *Clausius* von der auch bei dem *Weber*schen und *Riemann*schen Gesetze zu Grunde liegenden Annahme aus, dass die Kraft, mit der ein sich bewegendes Elektricitätstheilchen e' auf ein anderes e wirkt, nur von der gegenseitigen Entfernung der beiden Theilchen und von der Richtung und Grösse ihrer Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhänge. Indem er nun hiermit nur die Resultate sicherer Beobachtungen und das Princip der Erhaltung der Energie in Verbindung setzt, gelangt er zu seiner Fundamentalformel (66.), in welcher jedoch noch eine unbekannte Function von r vorkommt. Diese unbekannte Function hebt sich aber, wenn man die Kraft bestimmt, mit welcher ein Stromelement ds' auf ein anderes ds wirkt, von selbst weg, und so gelangt man zu der Gleichung (1.) und zu der ihr gleichbedeutenden (2.), welche also als vollkommen begründet angesehen werden müssen, sobald man nicht etwa auf höhere als die zweiten Zeitdifferentiale der bewegten Elektricitäten zurückgehen will.

Hierbei ist zu bemerken, dass die Formeln (1.) und (2.) auch geltend bleiben, wenn die beiden entgegengesetzten nach entgegengesetzter Richtung strömenden Elektricitäten nicht dieselbe Geschwindigkeit haben, dass aber dann unter Intensität des Stromes die Summe der positiven und der in entgegengesetzter Richtung strömenden negativen Elektricität zu verstehen ist, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters strömen.

Ich schliesse hieran eine ganz elementare Ableitung der Wirkung eines constanten geschlossenen Stromes auf ein Stromelement, welche zugleich zu Resultaten führt, die, wie ich glaube, bisher unbekannt gewesen sind.

Wenn man in (2.) statt a seinen Werth $i'ds'$ setzt, so findet man durch Integration sogleich die Kraft v, welche eine mit der Intensität i' durchströmte Strecke BC auf ein Stromelement übt, dessen Anfangspunkt in A liegt, und dessen Projection auf die Ebene ABC gleich b_1 ist. Nämlich wenn $AD = h$ die Höhe des Dreiecks ABC ist, und die Stücke des Dreiecks in hergebrachter Weise benannt werden, so ist

$$v = \frac{ki'b_1}{h}(\cos\beta + \cos\gamma).$$

Wenn ins Besondere b_1 mit BC gleichgerichtet ist, so hat v die Richtung von AD; und wenn sich b_1 um einen beliebigen Winkel in der Wirkungsebene dreht, so dreht sich die Richtung von v um denselben Winkel, während der *Werth* von v derselbe bleibt. Wenn α der dritte Winkel des Dreiecks

und m die Mittellinie ist, welche diesen Winkel hälftet und bis zur gegenüberliegenden Seite reicht, so ist bekanntlich $\frac{\cos\beta + \cos\gamma}{h} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{m}$ und die obige Formel wird

$$(3.)\qquad v = \frac{2ki'b_1\sin\frac{\alpha}{2}}{m}.$$

Um aber diese Formel unmittelbar benutzen zu können, ist es nothwendig, in ihr auch die Richtung der Kraft v darzustellen. Zu dem Ende muss ich auf einige Begriffe der geometrischen Analysis zurückgehen, wie ich sie in meinen Ausdehnungslehren von 1844 und 1862 dargestellt habe, nämlich auf den Begriff der Strecken, der Flächenräume, auf die Addition der Strecken und Flächenräume und auf das innere Product des Flächenraums in die Strecke. Nämlich zwei begrenzte gerade Linien setze ich als *Strecken* nur dann gleich, wenn sie gleiche Länge und Richtung haben, und zwei Ebenentheile setze ich als *Flächenräume* nur dann gleich, wenn die beiden Ebenen parallel sind und die Ebenentheile gleichen und gleichbezeichneten Flächeninhalt haben; zwei Strecken werden *addirt*, indem man sie stetig aneinander legt, dann ist die Strecke vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der letzten die Summe beider Strecken, zwei Flächenräume werden addirt, indem man sie als Parallelogramme stetig aneinanderlegt, d. h. sie so legt, dass die Grundseite des zweiten mit der Deckseite (der der Grundseite gegenüberliegenden Seite) des ersten zusammenfällt, dann ist das Parallelogramm, dessen Grundseite die Grundseite des ersten und dessen Deckseite die Deckseite des zweiten Parallogramms ist, die Summe der beiden Flächenräume. Endlich unter dem *inneren Producte* eines Flächenraums F, dessen Inhalt Eins ist, in eine Strecke b, geschrieben $[F|b]$ verstehe ich eine Strecke g, welche mit der Projection b_1 von b auf F gleich lang ist, welche in der Ebene F auf b_1 (also auch auf b) senkrecht steht, und welche an b_1 stetig angelegt nach derselben Seite hin abbiegt, nach welcher der Umfang von F durchlaufen wird. Setzt man λF statt F, wo λ den Flächeninhalt ausdrückt, so wird $[\lambda F|b] = \lambda g$.

Wenden wir dies auf den obigen Fall an, und setzen fest, dass F mit dem Flächenraum des Dreiecks ABC gleichbezeichnet sei, so ist klar, dass nach dem Obigen die Richtung der Kraft mit $[F|b]$ entgegengesetzt bezeichnet sei, und also, wenn die Richtung der Kraft zugleich ausgedrückt

werden soll, in (3.) statt b_1 zu setzen ist $-$ $[F|b]$, d. h.

$$(4.)\qquad v = -\frac{2ki'\sin\frac{\alpha}{2}}{m}[F|b].$$

Nun durchströme der galvanische Strom ein beliebiges Raumpolygon, dessen eine Seite BC ist, während A der Anfangspunkt des Stromelementes b bleibt. Für das sich an ABC anschliessende Dreieck sei α_1 statt α, m_1 statt m und F_1 statt F gesetzt, u. s. w., so ist die Kraft V, mit der das ganze Polygon auf das Stromelement $\underline{b}$ wirkt,

$$(5.)\qquad V = -2ki'[Q|\underline{b}],\ \text{wo}\ Q = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{m}F + \frac{\sin\frac{\alpha_1}{2}}{m_1}F_1 + \cdots$$

Diese Gleichung schliesst folgenden wichtigen Satz ein:

„Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so giebt es zu jedem Punkte A eine bestimmte Ebene, die man durch A gehend annehmen, und die Wirkungsebene des Stromes in Bezug auf den Punkt A nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes von A ausgehende Stromelement (b) erstens, wenn es auf dieser Ebene senkrecht steht, keine Einwirkung durch den Strom erfährt, zweitens, wenn es schräge darauf steht, dieselbe Wirkung erleidet wie seine (senkrechte) Projection (b_1) auf diese Ebene erleiden würde, drittens, dass die Kraft, die es erfährt, in dieser Ebene liegt und auf der Projection (b_1) des Stromelementes und also auch auf diesem selbst senkrecht steht, und viertens dass, wenn g die Kraft ist, welche jenes (von A ausgehende) Stromelement (b) in irgend einer Lage erfährt, und sich die Projection (b_1) des Stromelementes auf die Wirkungsebene um irgend einen Winkel in dieser Ebene dreht, dann auch die Kraft g ohne ihren Werth zu verändern sich um denselben Winkel dreht."

Diese Wirkungsebene ist, wenn der Strom ein Polygonstrom im Raume ist, aufs leichteste zu construiren. Denn sie ist parallel mit Q, und Q ist nach Formel (5.) durch Addition der Flächenräume unmittelbar zu finden.

Viel bequemer als der hier eingeschlagene Weg wird die Methode, wenn man gleich von Anfang die geometrische Analysis einführt. Aber dann ist noch der Begriff des äusseren Productes zweier Strecken einzuführen. Ich verstehe nämlich unter dem äusseren Product $[a.b]$ zweier Strecken a und b den Flächenraum des Parallelogramms, welches a zur

Grundseite und b zur sich daran anschliessenden Seite hat. Dann ergiebt sich, was ich hier nicht nachweisen will, aus Formel (1.) unmittelbar die Formel

$$(2^*.) \qquad P = \frac{k}{r^3}[\underline{r}.\underline{a}|\underline{b}],$$

wo $\underline{r}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ die Strecken selbst darstellen, deren Längen wir oben mit r, a, b bezeichneten, und wo P die Kraft ihrer Grösse und Richtung nach ist.

Setzen wir hier $\underline{a} = i'\underline{ds'}$, wo wieder $\underline{ds'}$ zugleich die Richtung des Stromelementes ds' darstellt und nehmen $\underline{ds'}$ als Element eines beliebigen geschlossenen Stromes, so erhalten wir, wenn man die Integration auf den ganzen geschlossenen Strom ausdehnt,

$$(5^*.) \qquad V = ki'[Q|b], \quad \text{wo} \quad Q = \int \frac{[r.\underline{ds'}]}{r^3}$$

ist.

Es hat hier wie überall nicht die mindeste Schwierigkeit, die Formeln der geometrischen Analysis unmittelbar in die in der Regel sehr viel complicirteren Formeln der gewöhnlichen Analysis umzusetzen. Man hat zu dem Ende nur auf den drei gegeneinander senkrechten Coordinatenaxen drei Strecken anzunehmen, deren Richtungen die der positiven Axen und deren Längen Eins sind, diese seien e_1, e_2, e_3; sind dann a_1, a_2, a_3 die Coordinaten einer Strecke a, so hat man nur statt a zu setzen $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. Wendet man dies Verfahren bei jeder Strecke an und führt dann die Additionen und Multiplicationen nach den gewöhnlichen Gesetzen der Algebra aus, nur dass man die Factoren eines Productes nicht ohne Weiteres vertauscht und zusammenfasst, so bleiben in der Formel keine anderen Strecken übrig als e_1, e_2, e_3, deren Multiplication, sei sie eine äussere oder innere, nach den Definitionen dieser Producte auszuführen ist. In unserer Formel (5*.) erhält man dann V zuletzt in der Form $V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$, wo dann V_1, V_2, V_3 die gesuchten algebraischen Ausdrücke sind.

Stettin, den 10. Januar 1877.

Ueber den Ausdruck, welcher im Fall gleicher Wurzeln an die Stelle der *Vandermonde*schen alternirenden Function tritt.

(Von Herrn *Franke* in Dessau.)

Wenn die Gleichung

$$\text{(I.)}\qquad x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n = 0,$$

$\varkappa_1$ gleiche Wurzeln zum Werthe r_1,
$\varkappa_2$ - - - - r_2,
$\vdots$
$\varkappa_s$ - - - - r_s

hat, so dass $\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_s=n$, so existiren, falls man das Differential $\frac{d^pr^q}{dr^p}$ der Kürze halber mit $[r^q]^p$ bezeichnet, die n Relationen:

$$\begin{array}{l}
[r_1^n]^0 + A_1[r_1^{n-1}]^0 + A_2[r_1^{n-2}]^0 + \cdots + A_{n-1}[r_1^1]^0 + A_n[r_1^0]^0 = 0,\\
[r_1^n]^1 + A_1[r_1^{n-1}]^1 + A_2[r_1^{n-2}]^1 + \cdots + A_{n-1}[r_1^1]^1 + A_n[r_1^0]^1 = 0,\\
\vdots\\
[r_1^n]^{\varkappa_1-1} + A_1[r_1^{n-1}]^{\varkappa_1-1} + A_2[r_1^{n-2}]^{\varkappa_1-1} + \cdots + A_{n-1}[r_1^1]^{\varkappa_1-1} + A_n[r_1^0]^{\varkappa_1-1} = 0,\\
[r_2^n]^0 + A_1[r_2^{n-1}]^0 + A_2[r_2^{n-2}]^0 + \cdots + A_{n-1}[r_2^1]^0 + A_n[r_2^0]^0 = 0,\\
\vdots\\
[r_s^n]^{\varkappa_s-1} + A_1[r_s^{n-1}]^{\varkappa_s-1} + A_2[r_s^{n-2}]^{\varkappa_s-1} + \cdots + A_{n-1}[r_s^1]^{\varkappa_s-1} + A_n[r_s^0]^{\varkappa_s-1} = 0,
\end{array}$$

aus denen die Gleichung:

$$\text{(II.)}\qquad \frac{dP_{n+1}}{d\varrho_p}:\frac{dP_{n+1}}{d\varrho_n} = A_{n-p}$$

resultirt, wenn man mit P_{n+1} die Determinante

$$\begin{vmatrix}
[r_1^n]^0 & [r_1^{n-1}]^0 & \dots & [r_1^1]^0 & [r_1^0]^0\\
[r_1^n]^1 & [r_1^{n-1}]^1 & \dots & [r_1^1]^1 & [r_1^0]^1\\
\vdots & & & & \\
[r_1^n]^{\varkappa_1-1} & [r_1^{n-1}]^{\varkappa_1-1} & \dots & [r_1^1]^{\varkappa_1-1} & [r_1^0]^{\varkappa_1-1}\\
[r_2^n]^0 & [r_2^{n-1}]^0 & \dots & [r_2^1]^0 & [r_2^0]^0\\
\vdots & & & & \\
[r_s^n]^{\varkappa_s-1} & [r_s^{n-1}]^{\varkappa_s-1} & \dots & [r_s^1]^{\varkappa_s-1} & [r_s^0]^{\varkappa_s-1}\\
\varrho_n & \varrho_{n-1} & \dots & \varrho_1 & \varrho_0
\end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Vermittelst dieser Gleichung beweist man leicht die Gültigkeit der Relation:

$$\text{(III.)}\quad (-1)^n \frac{dP_{n+1}}{d\varrho_n} = \prod_{m=1}^{m=s} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa_m-1} (-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa_m^2-\varkappa_m)} . \alpha^{\varkappa_m-\alpha} . \prod_{p<q} (r_p-r_q)^{\varkappa_p \varkappa_q}, \quad (p, q = 1, 2, \dots s),$$

wo die drei Factoren der rechten Seite in ausgeschriebener Form die Werthe

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+\cdots+\varkappa_s^2-n)},$$

$$1^{\varkappa_1-1}.2^{\varkappa_1-2}\dots(\varkappa_1-2)^2.(\varkappa_1-1)^1 \times 1^{\varkappa_2-1}.2^{\varkappa_2-2}\dots(\varkappa_2-1)^1 \times \cdots \times 1^{\varkappa_s-1}.2^{\varkappa_s-2}\dots(\varkappa_s-1)^1,$$

$$(r_1-r_2)^{\varkappa_1\varkappa_2}(r_1-r_3)^{\varkappa_1\varkappa_3}\dots(r_1-r_s)^{\varkappa_1\varkappa_s}.(r_2-r_3)^{\varkappa_2\varkappa_3}\dots(r_{s-1}-r_s)^{\varkappa_{s-1}\varkappa_s}$$

haben. Denn ist diese Relation für ein bestimmtes n gültig, was für $n=2$, $\varkappa_1=1$, $\varkappa_2=1$ in Wirklichkeit der Fall ist, so folgt, je nachdem man in P_{n+1}

$$\varrho_m = [r_{s+1}^m]^0 \quad \text{oder} \quad \varrho_m = [r_q^m]^{\varkappa_q}$$

setzt,

$$P_{n+1} = \frac{dP_{n+1}}{d\varrho_n}\{r_{s+1}^n + A_1 r_{s+1}^{n-1} + A_2 r_{s+1}^{n-2} + \cdots + A_{n-1} r_{s+1} + A_n\}$$

$$= (-1)^n \frac{dP_{n+1}}{d\varrho_n}(r_1-r_{s+1})^{\varkappa_1}.(r_2-r_{s+1})^{\varkappa_2}\dots(r_s-r_{s+1})^{\varkappa_s}$$

oder

$$P_{n+1} = \frac{dP_{n+1}}{d\varrho_n}\{[r_q^n]^{\varkappa_q} + A_1[r_q^{n-1}]^{\varkappa_q} + A_2[r_q^{n-2}]^{\varkappa_q} + \cdots + A_{n-1}[r_q^1]^{\varkappa_q} + A_n[r_q^0]^{\varkappa_q}\}$$

$$= (-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_{q-1}}.\varkappa_q(\varkappa_q-1)\dots 2.1.(r_1-r_q)^{\varkappa_1}(r_2-r_q)^{\varkappa_2}\dots(r_{q-1}-r_q)^{\varkappa_{q-1}}.(r_q-r_{q+1})^{\varkappa_{q+1}}\dots(r_q-r_s)^{\varkappa_s}.$$

Im ersteren Falle ist

$$P_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{dP_{n+2}}{d\varrho_{n+1}},$$

im zweiten Falle

$$P_{n+1} = (-1)^{n+1}.(-1)^{\varkappa_{q+1}+\varkappa_{q+2}+\dots+\varkappa_s}.\frac{dP_{n+2}}{d\varrho_{n+1}}.$$

Bezeichnet man für $\frac{dP_{n+2}}{d\varrho_{n+1}}$ die verschiedenen Werthe von r mit $r_1, r_2, \dots r_t$ und die Zahl der Reihen, in denen r_p enthalten ist, mit λ_p, und berücksichtigt, dass im ersten Falle

$$t = s+1, \quad \lambda_1 = \varkappa_1, \quad \lambda_2 = \varkappa_2, \quad \dots \quad \lambda_{t-1} = \varkappa_s, \quad \lambda_t = 1,$$

und dass im zweiten Falle

$$t = s, \quad \lambda_1 = \varkappa_1, \quad \lambda_2 = \varkappa_2, \quad \dots \quad \lambda_{q-1} = \varkappa_{q-1},$$

$$\lambda_q = \varkappa_q + 1, \quad \lambda_{q+1} = \varkappa_{q+1}, \quad \dots \quad \lambda_t = \varkappa_s,$$

$$\varkappa_q^2 - n + 2\varkappa_q = \lambda_q^2 - (n+1),$$

so resultirt für beide Fälle:

$$(-1)^{n+1}\frac{dP_{n+2}}{d\varrho_{n+1}}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}\{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_t^2-(n+1)\}}.1^{\lambda_1-1}.2^{\lambda_1-2}\ldots(\lambda_1-2)^2.(\lambda_1-1)^1\ldots 1^{\lambda_t-1}.2^{\lambda_t-2}\ldots(\lambda_t-2)^2(\lambda_t-1)^1$$

$$\times(r_1-r_2)^{\lambda_1.\lambda_2}.(r_1-r_3)^{\lambda_1.\lambda_3}\ldots(r_{t-1}-r_t)^{\lambda_{t-1}.\lambda_t}.$$

Sind sämmtliche n Wurzeln einander gleich, so erhält man

$$\text{(IV.)}\qquad (-1)^n.\frac{dP_{n+1}^1}{d\varrho_n} = (-1)^{\frac{n.n-1}{2}}.1^{n-1}.2^{n-2}\ldots(n-2)^2.(n-1)^1.$$

Bezeichnet man ferner die Determinante:

$$\begin{vmatrix} [r_1^0]^0 & [r_1^0]^1 & [r_1^0]^2 & \ldots & [r_1^0]^{\varkappa_1-1}, & [r_2^0]^0 & [r_2^0]^1 & \ldots & [r_s^0]^{\varkappa_s-1} \\ [r_1^1]^0 & [r_1^1]^1 & [r_1^1]^2 & \ldots & [r_1^1]^{\varkappa_1-1} & [r_2^1]^0 & [r_2^1]^1 & \ldots & [r_s^1]^{\varkappa_s-1} \\ \vdots & & & & & & & & \\ [r_1^{n-1}]^0 & [r_1^{n-1}]^1 & [r_1^{n-1}]^2 & \ldots & [r_1^{n-1}]^{\varkappa_1-1} & [r_2^{n-1}]^0 & [r_2^{n-1}]^1 & \ldots & [r_s^{n-1}]^{\varkappa_s-1} \end{vmatrix}$$

mit Q, so hat man:

$$Q = (-1)^{\frac{n.n-1}{2}}.(-1)^n.\frac{dP_{n+1}}{d\varrho_n},$$

$$\frac{dQ}{d[r_p^{n-1}]^{\varkappa_p-1}} = (-1)^{\frac{n.n-1}{2}+\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_{p-1}+(\varkappa_p-1)}.(-1)^{n-1}.\frac{dP_n}{d\varrho_{n-1}},$$

also

$$\text{(V.)}\qquad \frac{dQ}{d[r_p^{n-1}]^{\varkappa_p-1}}:Q = \frac{(-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_{p-1}}}{1.2.3\ldots(\varkappa_p-1).(r_1-r_p)^{\varkappa_1}(r_2-r_p)^{\varkappa_2}\ldots(r_p-r_s)^{\varkappa_s}}.$$

Bei Berechnung des vollständigen Integrals der Differentialgleichung

$$[y]^n+A_1[y]^{n-1}+A_2[y]^{n-2}+\cdots+A_{n-1}[y]^1+A_n[y]^0 = F(x)$$

gelangt man zu der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} [e^{r_1x}]^0 & [xe^{r_1x}]^0 & [x^2e^{r_1x}]^0 & \ldots [x^{\varkappa_1-1}e^{r_1x}]^0 & [e^{r_2x}]^0 & [xe^{r_2x}]^0 & \ldots [x^{\varkappa_s-1}e^{r_sx}]^0 \\ [e^{r_1x}]^1 & [xe^{r_1x}]^1 & [x^2e^{r_1x}]^1 & \ldots [x^{\varkappa_1-1}e^{r_1x}]^1 & [e^{r_2x}]^1 & [xe^{r_2x}]^1 & \ldots [x^{\varkappa_s-1}e^{r_sx}]^1 \\ \vdots & & & & & & \\ [e^{r_1x}]^{n-1} & [xe^{r_1x}]^{n-1} & [x^2e^{r_1x}]^{n-1} & \ldots [x^{\varkappa_1-1}e^{r_1x}]^{n-1} & [e^{r_2x}]^{n-1} & [xe^{r_2x}]^{n-1} & \ldots [x^{\varkappa_s-1}e^{r_sx}]^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Hierin ist:

$$[x^ie^{rx}]^p = [x^i]^0[e^{rx}]^p+\frac{p}{1}[x^i]^1[e^{rx}]^{p-1}+\frac{p.p-1}{1.2}[x^i]^2[e^{rx}]^{p-2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{p.p-1\ldots2.1}{1.2\ldots p}[x^i]^p[e^{rx}]^0$$

$$= e^{rx}\left\{[x^i]^0[r^p]^0+\frac{[x^i]^1[r^p]^1}{1}+\frac{[x^i]^2[r^p]^2}{1.2}+\cdots+\frac{[x^i]^p[r^p]^p}{1.2\ldots p}\right\}.$$

Für $p>i$ verschwinden die Glieder dieser Reihe von der Form

$$\frac{[x^i]^{p+s}.[r^p]^{p+s}}{1.2\ldots(p+s)};$$

andererseits kann man für $p < i$ die Reihe um die ebenfalls verschwindenden Glieder von der Form

$$\frac{[x^s]^{p-s}\cdot r^{p-s}}{1.2\ldots(p-s)}$$

verlängern, so dass man erhält

$$[x^s e^{rx}]^p = e^{rx}\cdot\sum_{\beta=0}^{\beta=p}\frac{[x^s]^{\beta}\, r^{p-\beta}}{1.2\ldots\beta}.$$

Die Determinante R ist demnach die Summe aller möglichen Ausdrücke von der Form:

$$e^{r_1 x}\cdot e^{r_2 x}\cdot e^{r_3 x}\ldots e^{r_\nu x}\cdot\frac{[x^0]^{\beta_1}}{1.2\ldots\beta_1}\cdot\frac{[x^1]^{\beta_2}}{1.2\ldots\beta_2}\cdots\frac{[x^{m-1}]^{\beta_m}}{1.2\ldots\beta_m}\cdot\frac{[x^0]^{\gamma_1}}{1.2\ldots\gamma_1}\cdot\frac{[x^1]^{\gamma_2}}{1.2\ldots\gamma_2}\cdots\frac{[x^{m_\nu-1}]^{\zeta_{m_\nu}}}{1.2\ldots\zeta_{m_\nu}}$$

$$\times\begin{vmatrix} [r_1^0]^{\beta_1} & [r_1^0]^{\beta_2} & \ldots & [r_1^0]^{\beta_m} & [r_2^0]^{\gamma_1} & [r_2^0]^{\gamma_2} & \ldots & [r_\nu^0]^{\zeta_{m_\nu}} \\ [r_1^1]^{\beta_1} & [r_1^1]^{\beta_2} & \ldots & [r_1^1]^{\beta_m} & [r_2^1]^{\gamma_1} & [r_2^1]^{\gamma_2} & \ldots & [r_\nu^1]^{\zeta_{m_\nu}} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ [r_1^{n-1}]^{\beta_1} & [r_1^{n-1}]^{\beta_2} & \ldots & [r_1^{n-1}]^{\beta_m} & [r_2^{n-1}]^{\gamma_1} & [r_2^{n-1}]^{\gamma_2} & \ldots & [r_\nu^{n-1}]^{\zeta_{m_\nu}} \end{vmatrix},$$

und zwar können die Grössen β_m, γ_m, … ζ_m alle Werthe von Null bis $m-1$ annehmen.

Die den letzten Factor dieses Products bildende Determinante verschwindet, so oft zwei der Grössen β oder γ… oder ζ einander gleich sind; da nun aber β_1, γ_1, … ζ_1 nur gleich Null sein können, so verschwinden sämmtliche Determinanten bis auf die eine, in welcher

$$\beta_n = \gamma_m = \cdots = \zeta_n = m-1$$

ist.

Mit Rücksicht darauf, dass $\frac{[x^s]^s}{1.2\ldots s} = 1$ ist, resultirt:

$$\text{(VI.)}\qquad R = e^{x(m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_\nu r_\nu)}\cdot Q$$

und

$$\text{(VII.)}\qquad \frac{dR}{d[x^{m_\nu-1}\cdot e^{r_\nu x}]^{n-1}} : R = \frac{dQ}{d[r_\nu^{n-1}]^{m_\nu-1}} : Q\cdot e^{r_\nu x}.$$

Sind die sämmtlichen n Wurzeln einander gleich, so ergeben sich auch die sämmtlichen Unterdeterminanten $\frac{dR}{d[x^s e^{rx}]^{n-1}}$ ohne Weiteres.

Der Ausdruck $(-1)^{n-s-1}\cdot\frac{dR}{d[x^s e^{rx}]^{n-1}}\cdot e^{-(n-1)rx}$ ist nämlich identisch mit der Determinante

$$\begin{array}{lllll} {}^{0}\,]^{0}\,[r^{0}\,]^{1}\ldots[r^{0}\,]^{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ {}^{1}\,]^{0}\,[r^{1}\,]^{1}\ldots[r^{1}\,]^{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^{p-1}]^{0}\,[r^{p-1}]^{1}\ldots[r^{p-1}]^{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ {}^{p}\,]^{0}\,[r^{p}\,]^{1}\ldots[r^{p}\,]^{p-1} & \sum\limits_{\beta_1=p}^{\beta_1=p}\frac{[x^{p+1}]^{\beta_1}.[r^{p}]^{\beta_1}}{1.2\ldots\beta_1} & \sum\limits_{\beta_2=p}^{\beta_2=p}\frac{[x^{p+2}]^{\beta_2}.[r^{p}]^{\beta_2}}{1.2\ldots\beta_2} & \ldots & \sum\limits_{\beta_m=p}^{\beta_m=p}\frac{[x^{n-1}]^{\beta_m}.[r^{p}]^{\beta_m}}{1.2\ldots\beta_m} \\ {}^{p+1}]^{0}\,[r^{p+1}]^{1}\ldots[r^{p+1}]^{p-1} & \sum\limits_{\gamma_1=p}^{\gamma_1=p+1}\frac{[x^{p+1}]^{\gamma_1}.[r^{p+1}]^{\gamma_1}}{1.2\ldots\gamma_1} & \sum\limits_{\gamma_2=p}^{\gamma_2=p+1}\frac{[x^{p+2}]^{\gamma_2}.[r^{p+1}]^{\gamma_2}}{1.2\ldots\gamma_2} & \ldots & \sum\limits_{\gamma_m=p}^{\gamma_m=p+1}\frac{[x^{n-1}]^{\gamma_m}.[r^{p+1}]^{\gamma_m}}{1.2\ldots\gamma_m} \\ \vdots \\ {}^{n-2}]^{0}\,[r^{n-2}]^{1}\ldots[r^{n-2}]^{p-1} & \sum\limits_{\zeta_1=p}^{\zeta_1=n-2}\frac{[x^{p+1}]^{\zeta_1}.[r^{n-2}]^{\zeta_1}}{1.2\ldots\zeta_1} & \sum\limits_{\zeta_2=p}^{\zeta_2=n-2}\frac{[x^{p+2}]^{\zeta_2}.[r^{n-2}]^{\zeta_2}}{1.2\ldots\zeta_2} & \ldots & \sum\limits_{\zeta_m=p}^{\zeta_m=n-2}\frac{[x^{n-1}]^{\zeta_m}.[r^{n-2}]^{\zeta_m}}{1.2\ldots\zeta_m} \end{array}\Bigg| .$$

Denn es sei $m < p$; addirt man zur m^{ten} Colonne der letzten Determinante die vorhergehenden Colonnen, nachdem dieselben mit

$$[x^{m-1}]^0, \quad \frac{[x^{m-1}]^1}{1}, \quad \ldots \quad \frac{[x^{m-1}]^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}$$

multiplicirt sind, so wird das Glied in der m^{ten} Colonne und der $(q+1)^{\text{ten}}$ Reihe

$$[x^{m-1}]^0[r^q]^0+\frac{[x^{m-1}]^1[r^q]^1}{1}+\frac{[x^{m-1}]^2[r^q]^2}{1.2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{[x^{m-1}]^{m-2}[r^q]^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}+[r^q]^{m-1} = \frac{[x^{m-1}.e^{rx}]^q}{e^{rx}}.$$

Ist aber $m > p$, so wird, wenn man die erste bis p^{te} Colonne nach Multiplication mit

$$[x^m]^0, \quad \frac{[x^m]^1}{1}, \quad \ldots \quad \frac{[x^m]^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}$$

zur m^{ten} Colonne addirt, das Glied der letzteren in der $(q+1)^{\text{ten}}$ Reihe:

$$[x^m]^0[r^q]^0+\frac{[x^m]^1.[r^q]^1}{1}+\frac{[x^m]^2.[r^q]^2}{1.2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{[x^m]^{p-1}.[r^q]^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}+\sum_{\beta=p}^{\beta=q}\frac{[x^m]^{\beta}[r^q]^{\beta}}{1.2\ldots\beta} = \frac{[x^m e^{rx}]^q}{e^{rx}}.$$

Man hat demnach:

$$(-1)^{n+p-1}.\frac{dR^1}{d[x^p e^{rx}]^{n-1}}.e^{-(n-1)rx} = [r^0]^0.[r^1]^1\ldots[r^{p-1}]^{p-1}$$

$$\times\left|\begin{array}{ccc} \sum\limits_{\beta_1=p}^{\beta_1=p}\frac{[x^{p+1}]^{\beta_1}[r^p]^{\beta_1}}{1.2\ldots\beta_1} & \ldots & \sum\limits_{\beta_m=p}^{\beta_m=p}\frac{[x^{n-1}]^{\beta_m}[r^p]^{\beta_m}}{1.2\ldots\beta_m} \\ \vdots & & \\ \sum\limits_{\zeta_1=p}^{\zeta_1=n-2}\frac{[x^{p+1}]^{\zeta_1}.[r^{n-2}]^{\zeta_1}}{1.2\ldots\zeta_1} & \ldots & \sum\limits_{\zeta_m=p}^{\zeta_m=n-2}[x^{n-1}]^{\zeta_m}.[r^{n-2}]^{\zeta_m} \end{array}\right|.$$

Zieht man in letzterer Determinante nach Multiplication mit schicklichen Factoren die erste Reihe von sämmtlichen folgenden Reihen, sodann die zweite Reihe von sämmtlichen folgenden Reihen u. s. w. ab, so erhält die Determinante folgende Gestalt:

$$\begin{vmatrix} \frac{[x^{p+1}]^p.[r^p]^p}{1.2\ldots p} & \frac{[x^{p+2}]^p.[r^p]^p}{1.2\ldots p} & \cdots & \frac{[x^{n-1}]^p.[r^p]^p}{1.2\ldots p} \\ \frac{[x^{p+1}]^{p+1}.[r^{p+1}]^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} & \frac{[x^{p+2}]^{p+1}.[r^{p+1}]^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} & \cdots & \frac{[x^{n-1}]^{p+1}.[r^{p+1}]^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} \\ \vdots & & & \\ \frac{[x^{p+1}]^{n-2}.[r^{n-2}]^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} & \frac{[x^{p+2}]^{n-2}.[r^{n-2}]^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} & \cdots & \frac{[x^{n-1}]^{n-2}.[r^{n-2}]^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} [x^{p+1}]^p & [x^{p+2}]^p & \cdots & [x^{n-1}]^p \\ [x^{p+1}]^{p+1} & [x^{p+2}]^{p+1} & \cdots & [x^{n-1}]^{p+1} \\ \vdots & & & \\ [x^{p+1}]^{n-2} & [x^{p+2}]^{n-2} & \cdots & [x^{n-1}]^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Letzterer Ausdruck ist gleich dem Producte des numerischen Factors

$$1.2\ldots(p+1).1.2\ldots(p+2)\ldots1.2\ldots(n-1)$$

in die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1} & \frac{x^2}{1.2} & \frac{x^3}{1.2.3} & \cdots & & & \frac{x^{n-p-1}}{1.2\ldots(n-p-1)} \\ 1 & \frac{x}{1} & \frac{x^2}{1.2} & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \frac{x}{1} & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{x}{1} & \frac{x^2}{1.2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{x}{1} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man diese Determinante mit $S_{(n-p-1)}$, so hat man

$$S_m = \frac{x}{1}\cdot S_{m-1} - \frac{x^2}{1.2}\cdot S_{m-2} + \frac{x^3}{1.2.3}\cdot S_{m-3} \pm \cdots$$
$$\cdots \pm \frac{x^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)} S_2 \mp \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} S_1 \pm \frac{x^m}{1.2\ldots m}.$$

Wäre für S_p von $p=1$ bis $p=m-1$ der Werth

$$S_p = \frac{x^p}{1.2\ldots p}$$

gültig, so würde auch für $p=m$ der Werth

$$S_p = \frac{x^p}{1.2\ldots p}\left\{\frac{p}{1} - \frac{p.p-1}{1.2} + \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3} - \cdots \mp \frac{p}{1} \pm 1\right\} = \frac{x^p}{1.2\ldots p}$$

gelten. Da nun

$$S_1 = \frac{x}{1}, \quad S_2 = \frac{x^2}{1.2},$$

so folgt für jedes beliebige m

$$S_m = \frac{x^m}{1.2\ldots m}$$

und demnach:

$$\text{(VIII.)} \qquad \frac{dR^1}{d[x^p e^{rx}]^{n-1}} : R^1 = \frac{(-x)^{n-p-1}}{1.2\ldots(n-p-1).1.2\ldots p.e^{rx}}.$$

Dessau, den 8. December 1876.

Bemerkung zu derjenigen Gleichung, von welcher die Bestimmung der Normalen an eine Fläche zweiten Grades abhängt.

(Von Herrn *F. Caspary.*)

Von einem beliebigen Punkte des Raumes lassen sich bekanntlich sechs oder fünf Normalen an eine Oberfläche zweiten Grades ziehen, je nachdem letztere eine Mittelpunktsfläche ist oder nicht. Ausnahmen hiervon bilden diejenigen Punkte, von denen aus zwei Normalen zusammenfallen, was für alle Punkte der Krümmungsmittelpunktsfläche eintritt. Für die Punkte dieser Fläche, die ich kurz Fläche der Centra nennen will, sind von den sechs bezw. fünf Wurzeln der die Normalen liefernden Gleichung zwei einander gleich. Da dasselbe für alle Punkte stattfindet, welche auf einer der Hauptebenen der gegebenen Oberfläche zweiten Grades liegen, so haben *Clebsch* *) und ich **) auch dieses Zusammenfallen der Wurzeln dahin interpretirt, dass beliebige Punkte der Hauptebenen zusammenfallende Lösungen des Normalenproblems ergeben. Letzteres ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Herr *August* hatte nämlich die Güte, mich darauf aufmerksam zu machen, dass, wie sich auf synthetischem Wege leicht ergiebt, *beliebige* Punkte der genannten Hauptebenen *distincte* Normalen liefern. Mit der Beantwortung der beiden Fragen, wesshalb und in welcher Weise das Zusammenfallen der Wurzeln für die Punkte der Fläche der Centra anders zu interpretiren ist, als für die der Hauptebenen, beschäftigt sich die folgende Note. Ausserdem enthält sie die dadurch nothwendige Abänderung einiger Sätze meiner oben erwähnten Arbeit.

Giebt man der Gleichung der Oberfläche zweiten Grades die Form:

$$(1.)\qquad \frac{x'^2}{a}+\frac{y'^2}{b}+\frac{z'^2}{c}-2z't' = 0,$$

aus welcher für $c=\infty$ das Paraboloid hervorgeht, und bedeuten X, Y, Z, T

---

*) Dieses Journal, Bd. 62, p. 70.

**) Dieses Journal, Bd. 81, p. 150.

die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume, so sind:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{X}{T}-\frac{x'}{t'} = \frac{\lambda}{\nu}\frac{1}{a}\frac{x'}{t'}, \\ \frac{Y}{T}-\frac{y'}{t'} = \frac{\lambda}{\nu}\frac{1}{b}\frac{y'}{t'}, \\ \frac{Z}{T}-\frac{z'}{t'} = \frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{1}{c}\frac{z'}{t'}-1\right), \end{cases}$$

oder indem man nach $\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$ auflöst:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{x'}{t'} = \frac{aX\nu}{T(a\nu+\lambda)}, \\ \frac{y'}{t'} = \frac{bY\nu}{T(b\nu+\lambda)}, \\ \frac{z'}{t'} = \frac{Z\nu+T\lambda}{T\left(\frac{\lambda}{c}+\nu\right)}, \end{cases}$$

die Coordinaten der vom Punkte (X, Y, Z, T) an (1.) gezogenen Normalen. Die Einsetzung von (3.) in (1.) ergiebt die die Normalen liefernde Gleichung:

$$(4.)\quad \frac{aX^2}{(a\nu+\lambda)^2}+\frac{bY^2}{(b\nu+\lambda)^2}+\frac{Z\nu+T\lambda}{\nu^2\left(\frac{\lambda}{c}+\nu\right)}\left\{\frac{Z\nu+T\lambda}{c\left(\frac{\lambda}{c}+\nu\right)}-2T\right\} = 0.$$

Befreit man dieselbe von den Nennern, und bezeichnet ihre linke Seite mit $\overline{\Omega}(\lambda,\nu)$, so ist, wie ersichtlich, $\overline{\Omega}(\lambda,\nu)=0$ vom sechsten Grade in $\frac{\lambda}{\nu}$. Bedeutet noch r die Distanz des Punktes (X, Y, Z, T) vom Punkte (x', y', z', t'), so folgt aus (2.):

$$(5.)\quad r^2 = \frac{\lambda^2}{\nu^2}\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{x'}{t'}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{y'}{t'}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\left(\frac{z'}{t'}\right)-1\right)^2\right\},$$

und man erkennt, dass, nach Substitution der Werthe von $\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$ aus (3.) in (5.), r^2 in allen Fällen eine eindeutige Function von $\frac{\lambda}{\nu}$ ist. Zu *einem* Werthe von $\frac{\lambda}{\nu}$ gehört daher *ein und nur ein* Werth von r^2, und zwei gleichen Werthen von $\frac{\lambda}{\nu}$ entsprechen zwei gleiche Werthe von r^2. Daher folgt, ***dass gleichen Wurzeln von $\Omega(\lambda,\nu)$ zuvörderst nicht zusammenfallende Normalen entsprechen, sondern nur Normalen gleicher Länge.*** Verlangt man demnach, dass letztere auch zusammenfallen, so müssen sie überdies noch

zusammenfallende Fusspunkte haben, was allerdings immer eintritt, wenn den betreffenden Werthen von $\frac{\lambda}{\nu}$ eindeutige Werthe von $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ entsprechen. Die Form der Gleichungen (3.) ergiebt aber sofort, dass diese Eindeutigkeit verloren geht, wenn einer der Werthe $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Dies ist der Fall der Hauptebenen. Daher folgt: ***Schliesst man die Hauptebenen der Flächen zweiten Grades aus, so liefern zusammenfallende Wurzeln der die Normalen bestimmenden Gleichung auch zusammenfallende Normalen.***

So lange $T \gtrless 0$ ist, geschieht die Auswerthung der unter unbestimmter Form sich ergebenden Fusspunktscoordinaten für die von den Hauptebenen auslaufenden Normalen am besten dadurch, dass man den für $\frac{\lambda}{\nu}$ sich ergebenden Werth in die drei anderen Fusspunktscoordinaten einsetzt, und die vierte Coordinate, die im allgemeinen doppeldeutig wird, aus der Gleichung der Oberfläche (1.) berechnet. Für $T = 0$ erhält man die Fusspunkte sofort, wenn man für $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$, $\frac{Z}{T}$ Polarcoordinaten anwendet. Man findet auf diese Weise, ***dass von einem beliebigen Punkte einer Hauptebene sechs distincte Normalen an die Mittelpunktsflächen zweiten Grades gehen. Vier derselben befinden sich, als Normalen der Schnittcurve, in der Hauptebene selber, während die beiden anderen ausserhalb derselben symmetrisch zu ihr liegen und von gleicher Länge sind.*** Während daher die auf die Fläche der Centra sich beziehenden Sätze der *Clebsch*schen Abhandlung und meiner eigenen unverändert bleiben, ergiebt sich für die Hauptebenen die Modification, dass an Stelle ***„zusammenfallender Normalen“*** ***„Normalen gleicher Länge“*** gesetzt werden muss. Will man die Punkte, von welchen Normalen gleicher Länge ausgehen, als Mittelpunkte von Kugeln ansehen, welche die Fläche zweiten Grades berühren, so kann man dies Resultat auch so aussprechen, dass die Punkte der Hauptebenen Mittelpunkte von Kugeln sind, welche ***doppelt berühren***, während die Punkte der Fläche der Centra die Mittelpunkte von ***osculirenden Kugeln*** sind. Hierdurch findet zugleich der von *Clebsch* und mir hervorgehobene Umstand seine Erklärung, dass die Discriminante von $\overline{\Omega}(\lambda, \nu) = 0$ in zwei wesentlich verschiedene Factoren zerfällt, von denen der eine die Fläche der Centra ist, während der andere die Hauptebenen ergiebt. Für die Punkte der letzteren haben zwei Normalen nur gleiche Länge, für die der

ersteren auch noch gleiche Richtung, fallen daher zusammen; oder anders ausgedrückt: Für die Punkte der Hauptebenen sind die Berührungskugeln doppelt berührende, für die der Fläche der Centra osculirende. Nach dem Vorangegangenen erklärt sich dies dadurch, dass im letzteren Falle die Coordinaten der Normalenfusspunkte, welche auch die Berührungspunkte der Flächen zweiten Grades mit der Berührungskugel sind, *eindeutig* bleiben, während sie im ersteren Falle unter unbestimmter Form sich darstellen und dann als *doppeldeutig* sich erweisen.

Setzt man $c = \infty$, so geht das Ellipsoid (1.) in die meiner Arbeit zu Grunde gelegte Form des elliptischen Paraboloids über, und die Formeln (3.) und (4.) verwandeln sich in die p. 146 aufgestellten. Die Gleichung (4.) wird für $c = \infty$ vom fünften Grade in $\frac{\lambda}{\nu}$ und an die Stelle der Hauptebenen der Fläche (1.) treten die beiden Symmetrieebenen $x' = 0$, $y' = 0$ und die unendlich ferne Ebene $t' = 0$. Da auf diesen Ebenen sich auch Punkte befinden, von welchen zwei oder mehr Normalen nicht allein gleich lang sind, sondern auch gleiche Richtung haben, so sind, wie sich aus dem Obigen leicht ergiebt, nur die zusätzlichen Bemerkungen p. 150, 165, 176, 179, 181 meiner Arbeit abzuändern, und zwar in folgender Weise: *Von einem beliebigen Punkte jeder von beiden Symmetrieebenen giebt es fünf distincte Normalen; von beliebigen Punkten der in den Symmetrieebenen liegenden Parabelevoluten fallen einmal zwei, und von den Rückkehrpunkten der letzteren Curven einmal drei Normalen zusammen, während zwei andere einander gleich werden. Für beliebige Punkte der unendlich fernen Ebene fallen zwei Normalen, und für diejenigen beiden Geraden, in denen sie die Fläche der Centra osculirt, drei Normalen zusammen.* Den von Punkten der Symmetrieebenen als Normalen gleicher Länge ermittelten, entsprechen für die unendlich ferne Ebene eine Normale mit endlichem Fusspunkte und eine andere in dem unendlich fernen Punkte des Paraboloids endende. Letztere ist gleichzeitig eine von den zwei oben erwähnten zusammenfallenden und dies zeigt die Zugehörigkeit der unendlich entfernten Ebene zur Fläche der Centra.

Berlin, den 20. Januar 1877.

Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen.

(Von Herrn *E. Hunyady* in Budapest.)

Mais en géométrie, comme en algèbre, la plupart des idées différentes ne sont que des transformations: etc.

(Poinsot: sur la composition des momens et la composition des aires. Journ. de l'école polyt. Cah. XIII pag. 189.)

Den Zusammenhang, welcher zwischen sechs auf einem Kegelschnitte liegenden Punkten besteht, drücken die folgenden geometrischen Theoreme aus:

a) Das von *Pappus* herrührende Problem „ad quatuor lineas," das seit *Descartes* das Problem von *Pappus* *) genannt wird.

b) Das Theorem von *Desargues* **).

c) Das Theorem von *Newton* ***) und das von *Chasles* †) „anharmonisches Verhältniss von Punkten eines Kegelschnittes" genannte Theorem.

d) Die Theoreme von *Pascal* ††), *Mac-Laurin* und *Braikenridge* und endlich

e) Das Theorem von *Carnot* †††).

Zu bemerken ist, dass die Eigenschaft des anharmonischen Verhältnisses von Punkten eines Kegelschnittes das Theorem von *Newton* enthält, und dass ferner die Theoreme von *Mac-Laurin* und *Braikenridge* sich von dem *Pascal*schen bloss in der Aussage unterscheiden.

---

*) Man vergl. *Chasles*, Aperçu historique 2ième édition. Chap. I, §. 32 pp. 37—39.

**) Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. *Poudra* T. I, p. 186, ferner p. 267.

***) Philosophiae naturalis principia mathematica. Editio *Leseur* et *Jacquier* 1739, T. I, p. 208.

†) Aperçu historique, Note XV art. 19.

††) Man vergl. *Chasles:* Aperçu historique Chap. II, §. 17.

†††) Géométrie de position. Paris 1808, p. 437 Theor. XXXVIII.

I.

1. Wir wollen nun unter der Voraussetzung, dass die Coordinaten der sechs Punkte gegeben seien, die vorhergehenden Theoreme der Reihe nach durch Gleichungen ausdrücken.

Bezeichnen wir mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 die fraglichen sechs Punkte und die homogenen Verhältnisscoordinaten des Punktes i mit x_i, y_i, z_i $(i=1,\dots 6)$, so ist

$$\Sigma \pm x_i y_k z = 0$$

die Gleichung der die Punkte i und k verbindenden Geraden, wenn wir unter x, y, z die laufenden Coordinaten verstehen.

Setzen wir ferner

$$(A.)\qquad \begin{cases} y_i z_k - y_k z_i = \xi_{ik}, \\ z_i x_k - z_k x_i = \eta_{ik}, \\ x_i y_k - x_k y_i = \zeta_{ik}, \end{cases}$$

so sind ξ_{ik}, η_{ik}, ζ_{ik} die homogenen Coordinaten der Geraden (ik).

Endlich sei noch

$$(B.)\qquad \Sigma \pm x_i y_k z_l = (ikl).$$

2. Von dem Theorem von ***Pappus*** ausgehend werden wir bezüglich des Vierecks 1324 ausdrücken, dass das Verhältniss der Producte der senkrechten Entfernungen des Punktes 5 von je zwei gegenüberliegenden Seiten gleich ist demselben Verhältnisse, wenn wir an die Stelle von 5 den Punkt 6 treten lassen.

Bezugnehmend auf die in (*B.*) eingeführte Bezeichnung, drückt sich dies durch die folgende Gleichung aus:

$$\frac{(135)(245)}{(145)(235)} = \frac{(136)(246)}{(146)(236)},$$

die zugleich ausdrückt, dass die sechs Punkte 1, ... 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

Wir erhalten dieselbe Gleichung, wenn wir das Viereck 1324 mit der Geraden 56 schneiden und dann nach dem Theorem von ***Desargues*** ausdrücken, dass die Punkte 5, 6 und die vier Schnittpunkte, in welchen die Transversale 56 die Seiten des Vierecks schneidet, in Involution sind, oder wenn wir nach der anharmonischen Eigenschaft von Punkten des Kegelschnitts ausdrücken, dass die die Punkte 5 und 6 mit den Punkten

1, 3, 2, 4 verbindenden zweimal vier Strahlen gleiche anharmonische Verhältnisse haben.

3. Von den Punkten 1, ... 6 lassen sich fünfzehnmal vier andere herausgreifen, da aber durch je vier Punkte drei einfache Vierecke bestimmt sind, so bestimmen die Punkte 1, ... 6 fünfundvierzig einfache Vierecke.

Drückt man nun das Theorem von *Pappus* bezüglich jedes der fünfundvierzig Vierecke aus, so würde man fünfundvierzig Gleichungen erhalten; da aber drei und drei dieser Vierecke immer auf dieselbe Gleichung führen, so erhält man auf diese Weise bloss fünfzehn der Form nach verschiedene Gleichungen, welche alle ausdrücken, dass die Punkte 1, ... 6 auf einem Kegelschnitte liegen. Es führen z. B. die folgenden drei Vierecke:

3546, 5162, 1324

auf die Bedingungsgleichung, die wir in der vorigen Nummer erhielten. Wenn wir den Vierecken die Punkte voransetzen, aus welchen die Perpendikel auf die Vierecksseiten gefällt werden, so lassen sich die vorhin angegebenen Vierecke auf folgende Weise zusammenstellen:

12	3546
34	5162
56	1324

woraus sich für diejenigen drei Vierecke, welche auf dieselbe Gleichung führen, ein leicht zu erkennendes Bildungsgesetz ergiebt.

Wir stellen nun die fünfundvierzig möglichen Vierecke in folgendem Tableau zusammen, indem wir solche drei in eine Gruppe stellen, welche auf dieselbe Gleichung führen.

(I.)	12	3546	(II.)	14	3562	(III.)	16	3524
	34	5162		36	5124		32	5146
	56	1324		52	1346		54	1362
(IV.)	14	3652	(V.)	15	3624	(VI.)	13	4562
	35	6124		32	6145		46	5123
	62	1345		64	1352		52	1436
(VII.)	16	4523	(VIII.)	13	4652	(IX.)	15	4623
	42	5136		45	6123		42	6135
	53	1462		62	1435		63	1452
(X.)	13	6254	(XI.)	15	2364	(XII.)	12	6543
	65	2143		26	3145		64	5132
	24	1635		34	1256		53	1624
(XIII.)	12	5346	(XIV.)	14	5362	(XV.)	16	5324
	54	3162		56	3124		52	3146
	36	1524		32	1546		34	1562

Man ersieht hieraus zugleich, dass aus (I.) durch cyklische Vertauschung der Zahlen 2, 4, 6; 4, 5, 2; 2, 3, 6 und 2, 3, 5 die Gruppen von (II.)—(IX.) hervorgehen. Vertauscht man ferner in (II.) die Zahlen 3, 4, 5 mit 5, 3, 4, dann 4, 5, 6 mit 5, 6, 4 und 2, 3, 4 mit 3, 4, 2, so erhält man die Gruppen (X.)—(XII.). Vertauscht man schliesslich in (I.), (II.) und (III.) die Zahlen 3 und 5 unter einander, so entspringen daraus die Gruppen (XIII.)—(XV.).

Die den fünfzehn Viereckssystemen entsprechenden Gleichungen sind die folgenden:

$$\begin{array}{rl}
(1.) & (136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245) = 0,\\
(2.) & (126)(135)(234)(456)-(123)(156)(246)(345) = 0,\\
(3.) & (125)(134)(246)(356)-(124)(135)(256)(346) = 0,\\
(4.) & (125)(136)(234)(456)-(123)(156)(245)(346) = 0,\\
(5.) & (126)(134)(245)(356)-(124)(136)(256)(345) = 0,\\
(6.) & (126)(145)(234)(356)-(124)(156)(236)(345) = 0,\\
(7.) & (125)(134)(236)(456)-(123)(145)(256)(346) = 0,\\
(8.) & (125)(146)(234)(356)-(124)(156)(235)(346) = 0,\\
(9.) & (126)(134)(235)(456)-(123)(146)(256)(345) = 0,\\
(10.) & (126)(145)(235)(346)-(125)(146)(236)(345) = 0,\\
(11.) & (124)(136)(235)(456)-(123)(146)(245)(356) = 0,\\
(12.) & (136)(145)(234)(256)-(134)(156)(236)(245) = 0,\\
(13.) & (135)(146)(234)(256)-(134)(156)(235)(246) = 0,\\
(14.) & (126)(135)(245)(346)-(125)(136)(246)(345) = 0,\\
(15.) & (124)(135)(236)(456)-(123)(145)(246)(356) = 0,
\end{array}$$

welche ausdrücken, dass die Punkte 1, ... 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

Man kommt von der Gleichung (1.) ausgehend durch die vorhin angegebenen Vertauschungen auf die Gleichungen (2.)—(15.).

5. Drückt man ferner nach dem *Pascal*schen Theoreme aus, dass die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks $iklmnp$ sich in drei Punkten schneiden, die in einer Geraden liegen, so erhält man unter Benützung folgender Bezeichnung:

$$(C.)\qquad \varDelta_{iklmnp} = \begin{vmatrix} \eta_{ik}\zeta_{mn}-\eta_{mn}\zeta_{ik}, & \zeta_{ik}\xi_{mn}-\zeta_{mn}\xi_{ik}, & \xi_{ik}\eta_{mn}-\xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\zeta_{pi}-\eta_{pi}\zeta_{lm}, & \zeta_{lm}\xi_{pi}-\zeta_{pi}\xi_{lm}, & \xi_{lm}\eta_{pi}-\xi_{pi}\eta_{lm} \\ \eta_{np}\zeta_{kl}-\eta_{kl}\zeta_{np}, & \zeta_{np}\xi_{kl}-\zeta_{kl}\xi_{np}, & \xi_{np}\eta_{kl}-\xi_{kl}\eta_{np} \end{vmatrix}$$

die Gleichung:

$$(16.)\qquad \varDelta_{iklmnp} = 0,$$

die zugleich ausdrückt, dass die sechs Punkte 1, ... 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

Da bekanntlich durch sechs Punkte sechzig einfache Sechsecke bestimmt sind, so repräsentirt die Gleichung (16.), wenn man für $iklmnp$ die den sechzig Sechsecken entsprechenden Zahlen setzt, sechzig Gleichungen, von welchen jede ausdrückt, dass die sechs Punkte 1, ... 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

5. Verbinden wir die Punkte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 durch Gerade und bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden 34 und 56, 56 und 12, 12 und 34 mit A, B, C, so lässt sich das Theorem von *Carnot* durch die folgende Gleichung ausdrücken:

$$\frac{A5}{A3}\cdot\frac{A6}{A4}\cdot\frac{B1}{B5}\cdot\frac{B2}{B6}\cdot\frac{C3}{C1}\cdot\frac{C4}{C2} = 1,$$

und da sich die in dieser Gleichung vorkommenden Verhältnisse durch die Coordinaten der Punkte 1, ... 6 ausdrücken lassen, so geht dieselbe nach Beibehaltung der in (B.) gewählten Bezeichnung in die folgende über:

$$\frac{(345)(346)(156)(256)(123)(124)}{(356)(456)(125)(126)(134)(234)} = 1,$$

oder

$$(125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) = 0.$$

Bedenkt man ferner, dass sich durch die Punkte 1, ... 6 fünfzehn Systeme von drei Geraden legen lassen und zwar die in den Gruppen (I.) — (XV.) den Vierecken vorangehen, so sehen wir, wie aus der vorhergehenden Gleichung durch die in No. 3 angegebenen Vertauschungen noch andere vierzehn Gleichungen folgen, welche den noch übrigen vierzehn Systemen von drei Geraden entsprechen, die durch die Punkte 1, ... 6 gehen.

Wir kommen also durch das Theorem von *Carnot* auf die folgenden fünfzehn Gleichungen:

$$(1^*.)\quad (125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) = 0,$$
$$(2^*.)\quad (124)(136)(145)(235)(256)(346) - (125)(134)(146)(236)(245)(356) = 0,$$
$$(3^*.)\quad (123)(146)(156)(236)(245)(345) - (126)(136)(145)(234)(235)(456) = 0,$$
$$(4^*.)\quad (124)(135)(146)(236)(256)(345) - (126)(134)(145)(235)(246)(356) = 0,$$
$$(5^*.)\quad (123)(145)(156)(235)(246)(346) - (125)(135)(146)(234)(236)(456) = 0,$$
$$(6^*.)\quad (123)(135)(146)(245)(256)(346) - (125)(134)(136)(235)(246)(456) = 0,$$
$$(7^*.)\quad (124)(136)(156)(235)(246)(345) - (126)(135)(146)(234)(245)(356) = 0,$$
$$(8^*.)\quad (123)(136)(145)(246)(256)(345) - (126)(134)(135)(236)(245)(456) = 0,$$
$$(9^*.)\quad (124)(135)(156)(236)(245)(346) - (125)(136)(145)(234)(246)(356) = 0,$$
$$(10^*.)\quad (123)(134)(156)(245)(246)(356) - (124)(135)(136)(234)(256)(456) = 0,$$
$$(11^*.)\quad (125)(134)(156)(236)(246)(345) - (126)(135)(145)(234)(256)(346) = 0,$$
$$(12^*.)\quad (123)(125)(146)(246)(345)(356) - (124)(126)(135)(235)(346)(456) = 0,$$
$$(13^*.)\quad (123)(126)(145)(245)(346)(356) - (124)(125)(136)(236)(345)(456) = 0,$$
$$(14^*.)\quad (124)(134)(156)(235)(236)(456) - (123)(145)(146)(234)(256)(356) = 0,$$
$$(15^*.)\quad (125)(136)(146)(234)(256)(345) - (126)(134)(156)(235)(245)(346) = 0,$$

von welchen eine jede ausdrückt, dass die Punkte 1, ... 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

6. In den Gleichungen (1.)—(15.) kommen von den zwanzig Ternen der sechs Zahlen 1, ... 6 je acht vor, während in den Gleichungen (1*.)—(15*.) deren zwölf vorkommen. Es ist nun zu bemerken, dass in je zwei Gleichungen, wie z. B. in (1.) und in (1*.) alle zwanzig Ternen vorkommen, es ergänzen sich also je eine Gleichung des Systems von (1.)—(15.) mit je einer des Systems von (1*.)—(15*.) und zwar so, dass einer Gleichung aus dem ersten System die mit derselben Zahl bezeichnete des zweiten Systems entspricht.

II.

7. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, wie sich die Theoreme von ***Pappus*, *Desargues*** und die anharmonische Eigenschaft von Punkten eines Kegelschnittes, dann die Theoreme von ***Pascal*** und ***Carnot*** durch Gleichungen ausdrücken lassen. Während die ersten drei Theoreme auf dieselben fünfzehn Gleichungen [(1.)—(15.)] führen, resultirten aus dem ***Pascal***schen Theorem sechzig (16.) und aus dem ***Carnot***schen fünfzehn Gleichungen [(1*.)—(15*.)].

Wir erhielten also im Ganzen neunzig von einander der Form nach verschiedene Gleichungen, welche alle ein und dieselbe geometrische Bedingung, dass nämlich sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, ausdrücken.

Auf die neunzig Gleichungen hat die Geometrie geführt, wenn daher die Algebra der Geometrie nicht nachstehen soll, so muss der zwischen den neunzig Gleichungen bestehende Zusammenhang durch algebraische Hülfsmittel erledigt werden.

Die Ermittelung dieses Zusammenhanges bildet die Hauptaufgabe dieser Abhandlung.

8. Wir wählen nun die Grösse Δ_{123456} als Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen.

Die Determinante Δ_{123456} erhält man unter wesentlich verschiedenen Formen, wenn man selbe der Reihe nach mit den folgenden neun Determinanten:

$$\Sigma\pm\xi_{12}\eta_{34}\zeta_{45},\quad \Sigma\pm\xi_{12}\eta_{34}\zeta_{61},\quad \Sigma\pm\xi_{12}\eta_{23}\zeta_{56},$$
$$\Sigma\pm\xi_{45}\eta_{34}\zeta_{56},\quad \Sigma\pm\xi_{12}\eta_{61}\zeta_{56},\quad \Sigma\pm\xi_{12}\eta_{34}\zeta_{23},$$
$$\Sigma\pm\xi_{12}\eta_{61}\zeta_{23},\quad \Sigma\pm\xi_{45}\eta_{34}\zeta_{23},\quad \Sigma\pm\xi_{45}\eta_{61}\zeta_{56}$$

multiplicirt, in welchen die Werthe der Grössen ξ, η, ζ aus den Gleichungen (A.) ersichtlich sind.

Die Resultate der Multiplication mögen durch folgende Gleichungen ausgedrückt sein:

$$(17.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{34}\zeta_{45} = \Sigma \pm a_1 b_2 a'_3.$$
$$(18.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{34}\zeta_{61} = \Sigma \pm a_1 b_2 b'_3,$$
$$(19.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{23}\zeta_{56} = \Sigma \pm a_1 c'_2 c_3,$$
$$(20.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{45}\eta_{34}\zeta_{56} = \Sigma \pm a'_1 b_2 c_3,$$
$$(21.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{61}\zeta_{56} = \Sigma \pm a_1 b'_2 c_3,$$
$$(22.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{34}\zeta_{23} = \Sigma \pm a_1 b_2 c'_3,$$
$$(23.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{61}\zeta_{23} = \Sigma \pm a_1 b'_2 c'_3,$$
$$(24.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{45}\eta_{34}\zeta_{23} = \Sigma \pm a'_1 b_2 c'_3,$$
$$(25.)\quad \varDelta_{123456} \Sigma \pm \xi_{45}\eta_{61}\zeta_{56} = \Sigma \pm a'_1 b'_2 c_3,$$

indem man hat

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 0, & a_2 = \Sigma \pm \zeta_{12}\eta_{34}\zeta_{61}, & a_3 = \Sigma \pm \xi_{12}\eta_{56}\zeta_{23}, \\
b_1 = \Sigma \pm \xi_{34}\eta_{12}\zeta_{45}, & b_2 = 0, & b_3 = \Sigma \pm \xi_{34}\eta_{56}\zeta_{23}; \\
c_1 = \Sigma \pm \xi_{56}\eta_{12}\zeta_{45}; & c_2 = \Sigma \pm \xi_{56}\eta_{34}\zeta_{61}; & c_3 = 0. \\
a'_1 = 0, & a'_2 = \Sigma \pm \xi_{45}\eta_{34}\zeta_{61}, & a'_3 = \Sigma \pm \xi_{45}\eta_{56}\zeta_{23}, \\
b'_1 = \Sigma \pm \xi_{61}\eta_{12}\zeta_{45}, & b'_2 = 0, & b'_3 = \Sigma \pm \xi_{61}\eta_{56}\zeta_{23}, \\
c'_1 = \Sigma \pm \xi_{23}\eta_{12}\zeta_{45}, & c'_2 = \Sigma \pm \xi_{23}\eta_{34}\zeta_{61}; & c'_3 = 0.
\end{array}$$

9. Die in den Gleichungen (17.)–(25.) vorkommenden Grössen a_2, a_3 etc. sind einer ferneren Reduction fähig, wenn man

$$a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ a'_2,\ a'_3,\ b'_2,\ b'_3,\ c'_1,\ c'_2$$

der Reihe nach mit den folgenden Determinanten:

(126), (123), (345), (234), (456), (156), (345), (456), (126), (156), (123), (234)

multiplicirt; es erhalten dann die erwähnten Grössen die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 0, & a_2 = (126)(134), & a_3 = -(123)(256), \\
b_1 = -(124)(345), & b_2 = 0, & b_3 = (234)(356), \\
c_1 = (125)(456), & c_2 = -(156)(346), & c_3 = 0, \\
a'_1 = 0, & a'_2 = -(146)(345), & a'_3 = (235)(456), \\
b'_1 = (126)(145), & b'_2 = 0, & b'_3 = -(156)(236), \\
c'_1 = -(123)(245), & c'_2 = (136)(234), & c'_3 = 0.
\end{array}$$

Setzt man schliesslich die für die Grössen a, b, c, ... erhaltenen Werthe in die Gleichungen (17.)—(25.) ein und multiplicirt die in dieser Gleichung linker Hand vorkommenden zweiten Factoren der Reihe nach mit den folgenden Determinanten:

(345)', (126), (123), (345), (126), (123), (123), (345), (456),

so gehen nach Weglassung der gleichen Factoren die Gleichungen (17.)—(25.) in die folgenden über:

$$(26.)\quad \Delta_{123456} = (126)(134)(235)(456)-(123)(146)(256)(345),$$
$$(27.)\quad \Delta_{123456} = (126)(145)(234)(356)-(124)(156)(236)(345),$$
$$(28.)\quad \Delta_{123456} = (125)(136)(234)(456)-(123)(156)(245)(346),$$
$$(29.)\quad \Delta_{123456} = (125)(146)(234)(356)-(124)(156)(235)(346),$$
$$(30.)\quad \Delta_{123456} = (125)(134)(236)(456)-(123)(145)(256)(346),$$
$$(31.)\quad \Delta_{123456} = (126)(134)(245)(356)-(124)(136)(256)(345),$$
$$(32.)\quad \Delta_{123456} = (136)(145)(234)(256)-(134)(156)(236)(245),$$
$$(33.)\quad \Delta_{123456} = (124)(136)(235)(456)-(123)(146)(245)(356),$$
$$(34.)\quad \Delta_{123456} = (126)(145)(235)(346)-(125)(146)(236)(345).$$

10. Gehen wir ferner von den Determinanten Δ_{124365} und Δ_{146325} aus, und multipliciren die erstere mit der Determinante

$$\Sigma \pm \xi_{12}\eta_{43}\zeta_{51},$$

während wir die zweite mit der Determinante

$$\Sigma \pm \xi_{14}\eta_{51}\zeta_{46}$$

multipliciren, so erhalten wir durch den früheren ähnliche Reductionen, dass

$$\Delta_{124365} = (125)(136)(234)(456)-(123)(156)(245)(346),$$
$$\Delta_{146325} = (125)(136)(234)(456)-(123)(156)(245)(346)$$

und somit nach Gleichung (28.)

$$(35.)\quad \Delta_{124365} = \Delta_{123456},$$
$$(36.)\quad \Delta_{146325} = \Delta_{123456}.$$

11. Multiplicirt man nun Δ_{124365} der Reihe nach mit den folgenden Factoren:

$$\Sigma \pm \xi_{12}\eta_{43}\zeta_{36},\quad \Sigma \pm \xi_{36}\eta_{43}\zeta_{61},\quad \Sigma \pm \xi_{36}\eta_{43}\zeta_{24},\quad \Sigma \pm \xi_{36}\eta_{51}\zeta_{65},$$

so erhält man nach ähnlichen Reductionen, wie vorher unter Berücksichtigung von (35.) die folgenden Gleichungen:

$$(37.)\quad \Delta_{123456} = (125)(134)(246)(356)-(124)(135)(256)(346),$$
$$(38.)\quad \Delta_{123456} = (126)(135)(234)(456)-(123)(156)(246)(345),$$
$$(39.)\quad \Delta_{123456} = (124)(135)(236)(456)-(123)(145)(246)(356),$$
$$(40.)\quad \Delta_{123456} = (126)(135)(245)(346)-(125)(136)(246)(345).$$

Multiplicirt man endlich Δ_{146325} mit den Factoren:

$$\Sigma \pm \xi_{14} \eta_{63} \zeta_{32}, \quad \Sigma \pm \xi_{12} \eta_{63} \zeta_{46},$$

so gelangt man nach Berücksichtigung von (36.) zu den folgenden Gleichungen:

$$(41.) \quad \Delta_{123456} = (136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245),$$

$$(42.) \quad \Delta_{123456} = (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246).$$

Es drücken nun die Gleichungen von (26.)—(34.) und (37.)—(42.) den Zusammenhang aus, der zwischen der Quantität Δ_{123456} und den ersten Gliedern der Gleichungen:

9, 6, 4, 8, 7, 5, 12, 11, 10, 3, 2, 15, 14, 1, 13

stattfindet.

12. Nach den vorhergehenden Erörterungen ist man im Stande, auch den zwischen den sechzig Quantitäten:

$$\Delta_{iklmnp}$$

bestehenden Zusammenhang zu ermitteln.

Es ist nämlich aus den Gleichungen (26.)—(34.) und (37.)—(42.) ersichtlich, dass, so oft in Δ_{123456} zwei Zahlen mit einander vertauscht werden, die auf diese Weise erhaltene Grösse bloss ihr Zeichen wechselt. Da nun alle Grössen Δ aus Δ_{123456} durch successive Vertauschung je zweier Zahlen erhalten werden, so folgt, dass

$$\Delta_{iklmnp}$$

das Vorzeichen von Δ_{123456} hat, oder nicht, jenachdem die Complexion

$$iklmnp$$

mit der Complexion

$$123456$$

in eine Klasse gehört oder nicht.

13. Um schliesslich noch den Zusammenhang von Δ_{123456} und den ersten Gliedern der Gleichungen (1*.)—(15*.) zu ermitteln, multiplicire man die Grössen

$$\Delta_{123456}, \quad \Delta_{143652}, \quad \Delta_{163254}, \quad \Delta_{143562}, \quad \Delta_{153264},$$

$$\Delta_{134652}, \quad \Delta_{164253}, \quad \Delta_{134562}, \quad \Delta_{154263}, \quad \Delta_{136524},$$

$$\Delta_{152634}, \quad \Delta_{126453}, \quad \Delta_{125436}, \quad \Delta_{145632}, \quad \Delta_{165234}$$

der Reihe nach mit den folgenden Determinanten

$$\Sigma \pm \xi_{12} \eta_{34} \zeta_{56}, \quad \Sigma \pm \xi_{14} \eta_{36} \zeta_{52}, \quad \Sigma \pm \xi_{16} \eta_{32} \zeta_{54}, \quad \Sigma \pm \xi_{14} \eta_{35} \zeta_{62}, \quad \Sigma \pm \xi_{15} \eta_{32} \zeta_{64},$$

$$\Sigma \pm \xi_{13} \eta_{46} \zeta_{52}, \quad \Sigma \pm \xi_{16} \eta_{42} \zeta_{53}, \quad \Sigma \pm \xi_{13} \eta_{45} \zeta_{62}, \quad \Sigma \pm \xi_{15} \eta_{42} \zeta_{63}, \quad \Sigma \pm \xi_{13} \eta_{65} \zeta_{24},$$

$$\Sigma \pm \xi_{15} \eta_{26} \zeta_{34}, \quad \Sigma \pm \xi_{12} \eta_{64} \zeta_{53}, \quad \Sigma \pm \xi_{12} \eta_{54} \zeta_{36}, \quad \Sigma \pm \xi_{14} \eta_{56} \zeta_{32}, \quad \Sigma \pm \xi_{16} \eta_{52} \zeta_{34}.$$

Nach Transformation der Elemente in den resultirenden Determinanten erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(43.)\quad \begin{cases} \Delta_{123456}\Sigma\pm\xi_{12}\eta_{34}\zeta_{56} = (125)(126)(134)(234)(356)(456) \\ \qquad -(123)(124)(156)(256)(345)(346), \end{cases}$$

$$(44.)\quad \begin{cases} -\Delta_{143652}\Sigma\pm\xi_{14}\eta_{36}\zeta_{52} = (124)(136)(145)(235)(256)(346) \\ \qquad -(125)(134)(146)(236)(245)(356), \end{cases}$$

etc., etc., etc.,

aus welchen der Zusammenhang zwischen der Quantität Δ_{123456} und den linken Seiten der Gleichungen (1*.) – (15*.) ersichtlich ist.

Budapest, im August 1876.

Neuer Beweis für die Unauflösbarkeit der Gleichungen von höherem als dem vierten Grade.

(Von Herrn *E. Netto*.)

In der irreductiblen Gleichung $f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ seien die a rationale Functionen von gewissen unabhängigen Veränderlichen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$; die Wurzeln von $f(x) = 0$ seien $x_1, x_2, \ldots x_n$. Im Falle die Gleichung allgemein ist, sind die symmetrischen Functionen der $x_1, \ldots x_n$ und nur diese in den a rational ausdrückbar. Soll man die Gleichung auflösen, so kommt dies darauf hinaus, die einzelnen x mit Hülfe gewisser Symbole, Wurzeln, auszudrücken; diese aber haben lediglich die Bedeutung, dass man die Wurzeln anderer einfacher Gleichungen $z^m = A$ als bekannt ansieht. Wir betrachten statt dieser Gleichung die allgemeinere $\varphi(z) \equiv z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_n = 0$ als der Gleichung $f(x) = 0$ „adjungirt." Kann man jetzt eine Function der x entweder durch alle, oder durch einige a und z rational darstellen, während dies durch die a allein nicht möglich war, besteht also eine Gleichung $F(x_1, \ldots x_n;\, z_1, z_2, \ldots z_m;\, a_1, \ldots a_n) = 0$, so wird nothwendiger Weise ein gewisser analytischer Zusammenhang zwischen den Coefficienten a und α bestehen. Denn wäre eine derartige Beziehung nicht vorhanden, so könnten auch die x und die z auf keine Weise in Beziehung zu einander gebracht werden. Welcher Art nun die Verbindung zwischen den $\mathfrak{R}$ und den α ist, darüber lässt sich allgemein nichts bestimmen. Der Absicht des vorliegenden Beweises entsprechend mögen die α als rationale Functionen der a, beziehungsweise der $\mathfrak{R}$ betrachtet werden, so dass also in dem obigen speciellen Falle $z^m = A$, A eine rationale Function der a wäre. Die Wurzeln $z_1, \ldots z_m$ sind folglich gleichfalls Functionen der a, und ihre Gesammtheit ändert sich nicht, wenn zwischen den x eine beliebige Permutation stattfindet. Die z sind aber durch Vermittelung der α und a auch algebraische Functionen der x. Möglicherweise lassen daher gewisse Permutationen zwischen den x schon einzelne z, z. B. z_1 für sich ungeändert. Diese Permutationen $g_1, g_2, \ldots$ bilden in so fern eine geschlossene „Gruppe," als diejenige Permutation, welche durch Aufeinanderfolge mehrerer von ihnen entsteht, gleichfalls z_1 ungeändert lässt und also zur

Gruppe gehört; mit andern Worten: das Product $g_1 . g_2 = g_3$ gehört wieder unter die Gruppe, also auch $g_3 : g_2 = g_1$; speciell also auch $1 : g_2 = g_2^{-1}$, d. h. diejenige Permutation, welche nach g_2 angewendet, deren Wirkung aufhebt. Wendet man aber auf alle Permutationen der so gebildeten Gruppe S_1 eine nicht in ihr enthaltene Permutation γ an, die daher z_1 in ein anderes z, z. B. in z_2 umwandelt, so erhält man eine neue Gruppe S_2, welche z_2 ungeändert lässt, und jede Permutation dieser Eigenschaft gehört zu S_2. Das Letzte ergiebt sich daraus, dass, wenn man auf irgend eine Permutation, die z_2 nicht ändert, γ^{-1} anwendet, eine solche Permutation entsteht, die z_1 ungeändert lässt. Betrachten wir daher die Permutationen, die gleichzeitig in sämmtlichen Gruppen S_1, $S_2, \dots S_m$ enthalten sind, also alle einzelnen z ungeändert lassen, so bilden diese eine Gruppe, welche in sich selbst übergeht, sobald auf alle Permutationen derselben ein und dieselbe Permutation angewendet wird. Denn jede Permutation versetzt die Gruppen $S_1, \dots S_m$ nur unter einander. Um diese Gruppe Σ genauer zu untersuchen, betrachten wir eine derjenigen Permutationen derselben, die möglichst wenig Elemente enthält. Lässt diese nun z. B. $x_1 x_2 x_3 \dots$ cyklisch auf einander folgen, und wenden wir die Permutation $x_1 x_2$ auf sie an, so folgt, dass Σ auch eine Permutation $x_2 x_1 x_3 \dots$ enthält, die mit Ausnahme der angezeigten Umstellung mit jener ersteren völlig übereinstimmt. Multiplicirt man aber beide mit einander, so erhält man eine Permutation von Σ, die x_1 nicht umsetzt; sie enthält also gegen die Voraussetzung weniger Elemente als die obige. Drei oder mehr Elemente darf jene Permutation also nicht cyklisch vertauschen; wenn sie ferner $x_1 x_2$ und ebenso $x_3 x_4$ cyklisch vertauschte, so wählt man, falls $n > 4$ ist, die Permutation $x_4 x_5$, wendet diese auf jene an und erhält $x_1 x_2$ und $x_3 x_5$. Die Multiplication ergiebt die cyklische Vertauschung von $x_3 x_4 x_5$. Dies widerspricht ebenfalls der Voraussetzung. Ist also $n > 4$, so enthält die Gruppe Σ Permutationen $x_\lambda x_\mu$, d. h. sämmtliche überhaupt möglichen; oder Permutationen $x_\kappa x_\lambda x_\mu$, d. h. die Hälfte aller möglichen, diejenigen nämlich, welche aus einer geraden Zahl von Transpositionen $x_\lambda x_\mu$ gebildet werden; oder nur die Permutation 1*). Diese Ableitung zeigt zugleich, dass die im zweiten Falle erhaltene „alternirende Gruppe"

*) Als ich diesen Theil des Beweises meinem verehrten Lehrer Herrn *Kronecker* mittheilte, erfuhr ich, dass derselbe diese Schlussfolgerung schon vor Jahren gefunden und von derselben auch Herrn *Serret* Mittheilung gemacht habe. Zugleich zeigte mir Herr *Kronecker*, wie unmittelbar aus dem obigen Ideengang der vielumworbene Satz folge, dass jede Function $F(x_1 \dots x_n)$, welche mehr als zwei Werthe besitzt, deren mindesten n habe.

gleichfalls keine andere enthält, welche sich reproducirt, wenn man auf sie eine beliebige Permutation jener Gruppe anwendet. Specialisiren wir nun wieder, indem wir $\varphi(z) \equiv z^m - A = 0$ setzen, wo A eine rationale Function der a ist, so ist $z_i = \varepsilon^i \sqrt[m]{A}$, ($\varepsilon$ primitive Wurzel von $\varepsilon^m = 1$) oder $z_i = \varepsilon^i H(x_1, \ldots x_n)$. Enthielte nun Σ hierbei alle Permutationen der x, so gäbe es nur ein einziges z, und es wäre $m = 1$ und z eine symmetrische Function der x; enthielte Σ die Hälfte aller möglichen Permutationen, so wäre $m = 2$ und z die Quadratwurzel aus einer rationalen Function der a. Schon die Gleichung dritten Grades — als Specialisirung von $f(x) = 0$ aufgefasst — zeigt, dass dies zur Lösung nicht ausreicht. Es müsste daher der dritte Fall eintreten, Σ wäre $= 1$, $m = n!$. Da nun die Permutationen der x die z in einander umwandeln, so giebt es eine Permutation, die z_1 in z_2, d. h. H in εH umwandelt. Diese wird weiter εH in $\varepsilon^2 H$ umwandeln u. s. w., und da ε primitive $n!^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, so wird die Permutation $n!$ von einander verschiedene Potenzen haben, d. h. von der Ordnung $n!$ sein. Da aber die Ordnung einer Permutation nicht grösser ist als das Product der Elementenzahlen der einzelnen Cyklen und dieses Product bei gleichen Factoren am grössten wird, so hätte man für x Factoren als eine im Allgemeinen nicht zu erreichende obere Grenze der Ordnung der Permutation y^x (bei $y.x = n$). Es ist aber

$$n! = 1.2\ldots y \times (y+1)\ldots 2y \times \cdots \times (xy - y + 1)\ldots xy \geqq (y!)^x \geqq y^x,$$

wo das untere Zeichen nur für den Fall $x = 1$, $y = 2$ also $n = 2$ gilt. Ist also $n > 2$, so giebt es keine Permutation der angeführten Eigenschaft, und da wir $n > 4$ voraussetzten, so folgt, dass die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades durch Adjunction der Wurzeln von binomischen Gleichungen nicht gelöst werden kann.

Berlin, den 12. Januar 1877.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Fortsetzung; siehe Bd. 81 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

In der nachstehenden Abhandlung werden die Untersuchungen über homogene lineare Differentialgleichungen mit *rationalen* Coefficienten, die der Verfasser in den Bdn. 78 und 81 dieses Journals anschliessend an seine früheren Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen Bd. 74, 75 und 76 dieses Journals angestellt hat, weiter fortgesetzt.

1.

Die homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x)=0$$

enthalte rationale Coefficienten und der grösste charakteristische Index h in der Differentialgleichung erfülle die Bedingung $0<h<m$. Es ist in Abh. Bd. 81 No. 5 gezeigt worden, wie sich ermitteln lässt, ob diese Differentialgleichung unter der Form

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}+p_1^{(h)}\dfrac{d^{m-h-1}y}{dx^{m-h-1}}+\cdots+p_{m-h}^{(h)}y = F_{m-h}(y,x)=s,\\[2mm] \dfrac{d^h s}{dx^h}+g_1\dfrac{d^{h-1}s}{dx^{h-1}}+\cdots+g_h s = f_h(s,x)=0 \end{cases}$$

dargestellt werden kann, wo die Coefficienten $p^{(h)}$ und g rational sind und in der Differentialgleichung $F_{m-h}=0$ der charakteristische Index bei allen Punkten gleich Null ist, und welches diese Darstellung ist.

In $f_h(s,x)$ sei $h=1$. Die rationale Function g_1 werde in Partialbrüche zerlegt und es sei G_1 die Summe derjenigen Glieder von g_1, die für Punkte x im Endlichen in der ersten Ordnung unendlich werden. Wird $\int(G_1-g_1)\,dx = W$ gesetzt, so ist W eine rationale Function und $g_1-G_1=\frac{d\log e^{-W}}{dx}$. Dann wird

$$(3.)\qquad f_1(s,x)=e^W\left\{\frac{de^{-W}s}{dx}+G_1e^{-W}s\right\}=e^W\bar{f}_1(e^{-W}s,x),$$

und es hat die Differentialgleichung

$$(4.)\qquad \bar{f}(\bar{s}, x) = \frac{d\bar{s}}{dx} + G_1\bar{s} = 0$$

bei allen Punkten den charakteristischen Index gleich Null.

Es soll jetzt ein dem Ausdrucke (3.) entsprechender für die Ordnung m gebildet werden. Man nehme einen Ausdruck von der Form $F_m(y, x)$ in (1.) mit rationalen Coefficienten $\bar{F}_m(\bar{y}, x)$, so dass in der Differentialgleichung $\bar{F}_m(\bar{y}, x) = 0$ bei allen Punkten der charakteristische Index gleich Null ist. Wenn $\bar{F}_m = 0$ im Endlichen x $(x \geqq 1)$ singuläre Punkte a_1 bis a_x besitzt und $\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_x)$ ist, so hat $\bar{F}_m$ die Form

$$(5.)\qquad \frac{d^m\bar{y}}{dx^m} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi(x)}\frac{d^{m-1}\bar{y}}{dx^{m-1}} + \frac{\psi_2(x)}{(\varphi(x))^2}\frac{d^{m-2}\bar{y}}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{\psi_m(x)}{(\varphi(x))^m}\bar{y},$$

wo $\psi_\alpha(x)$ eine ganze rationale Function, deren Grad $\leqq \alpha(x-1)$ ist. Und wenn $\bar{F}_m = 0$ im Endlichen keinen singulären Punkt besitzt, so ist $\bar{F}_m = \frac{d^m\bar{y}}{dx^m}$. Die Differentialgleichung $\bar{F}_m(\bar{y}, x) = 0$ hat nur reguläre Integrale, weshalb der Ausdruck $\bar{F}_m$ im Folgenden ein ***regulärer Differentialausdruck*** heissen soll. ***Es werde nun der Ausdruck $\omega\bar{F}_m(\omega^{-1}y, x)$ gebildet, wo ω eine solche analytische Function sein soll, dass $\omega\bar{F}_m(\omega^{-1}y, x)$ für jede beliebige Function y einem und demselben Ausdrucke der Form $F_m(y, x)$ in (1.) mit rationalen Coefficienten gleich wird.*** Die Coefficienten der gleich hohen Differentialquotienten in beiden Ausdrücken müssen alsdann übereinstimmen. Werden die Coefficienten von $\bar{F}_m(\bar{y}, x)$ durch $\bar{p}_\alpha$ bezeichnet, so erhält man

$$m\frac{d\log\omega}{dx} = \bar{p}_1 - p_1.$$

Ist die Summe derjenigen Glieder der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function $\frac{1}{m}(\bar{p}_1 - p_1)$, die für Punkte x im Endlichen in der ersten Ordnung unendlich werden, gleich $\bar{P}_1$ und wird $\frac{d\log\omega}{dx} = \frac{d\log\Omega}{dx} + \bar{P}_1$ gesetzt, so erhält man $\omega = \Omega H$, wo $\Omega = e^W$ und W eine rationale Function ist, $H = e^{\int\bar{P}_1 dx}$, ein Product der Form $\Pi(x-a)^\varkappa$. Nun ist $H\bar{F}_m(H^{-1}y, x) = G_m(y, x)$ selbst ein regulärer Differentialausdruck, da $G_m = 0$ rationale Coefficienten und nur reguläre Integrale hat (Abh. Bd. 75 No. 1. I.), und es wird $\omega\bar{F}_m(\omega^{-1}y, x) = e^W G_m(e^{-W}y, x)$. In der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function W kann, wenn das constante Glied von Null verschieden ist, statt dessen Null gesetzt werden, ohne dass

der Werth des Ausdruckes $e^W G_m(e^{-W}y, x)$ geändert wird. Wenn W eine beliebige rationale Function und G_m ein beliebiger regulärer Differentialausdruck ist, so wird $e^W G_m(e^{-W}y, x)$ gleich einem Ausdrucke der Form $F_m(y, x)$ in (1.) mit rationalen Coefficienten.

Ein Differentialausdruck von der Form $F_m(y, x)$ in (1.) mit rationalen Coefficienten, der für jede beliebige Function $\bar{y}$ einem und demselben Ausdrucke der Form $e^W \Phi(e^{-W}y, x)$ gleich ist, wo $\Phi(\bar{y}, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, W eine rationale Function, die in Partialbrüche zerlegt, zum constanten Gliede Null hat, ist nur ***einem*** Ausdrucke dieser Form gleich. Die Ordnung des regulären Ausdrucks Φ muss gleich m sein, und man erhält $p_1 = -m\frac{dW}{dx} + P_1$, wo P_1 die Summe derjenigen Glieder der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function p_1 ist, die für Punkte x im Endlichen in der ersten Ordnung unendlich werden. Demnach ist W aus der Gleichung $\int(P_1 - p_1)dx = mW$ und der Bedingung, dass die in Partialbrüche zerlegte rationale Function W zum constanten Gliede Null hat, vollständig bestimmt. Und dann erhält man den regulären Ausdruck $\Phi(\bar{y}, x) = e^{-W}F_m(e^W\bar{y}, x)$. Sind zwei von den Variablen x und y abhängende Differentialausdrücke, welche y und seine Differentialquotienten nach x nur in der ersten Potenz und nicht mit einander multiplicirt enthalten, für jede Function y einander gleich, so werde von dem einen Ausdruck gesagt, dass ***er sich durch den andern darstellen lässt.*** Ein Ausdruck von der Form $F_m(y, x)$ in (1.) mit rationalen Coefficienten, der sich unter der oben angegebenen Form $e^W\Phi(e^{-W}y, x)$ darstellen lässt, werde ein ***normaler Differentialausdruck*** genannt. Der Factor $e^W = \Omega$ heisse der ***determinirende Factor*** in dem normalen Ausdrucke, $\Phi(\bar{y}, x) = \bar{F}_m(\bar{y}, x)$ ist der reguläre Differentialausdruck in dem normalen. Ein regulärer Ausdruck ist dann selbst ein normaler mit dem determinirenden Factor 1.

Es sei nun ein Differentialausdruck der Form $F_m(y, x)$ in (1.) mit rationalen Coefficienten zerlegt in

$$(6.)\qquad f_{\alpha_0}(y, x) = y_1, \quad F_{m-\alpha_0}(y_1, x),$$

wo f_{α_0} ein normaler Differentialausdruck α_0^{ter} Ordnung, $F_{m-\alpha_0}$ ein Ausdruck der Form des Ausdruckes F_m in (1.) $(m-\alpha_0)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten ist. Dann sei wiederum $F_{m-\alpha_0}(y_1, x)$ zerlegt in

$$(7.)\qquad f_{\alpha_1}(y_1, x) = y_2, \quad F_{m-\alpha_0-\alpha_1}(y_2, x),$$

wo f_{α_1} ein normaler Differentialausdruck α_1^{ter} Ordnung, $F_{m-\alpha_0-\alpha_1}$ ein Ausdruck der Form des Ausdruckes F_m in (1.) $(m-\alpha_0-\alpha_1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen

Coefficienten ist, und also endlich $F_m(y,x)$ dargestellt durch

(8.) $f_{\mathfrak{a}_0}(y,x)=y_1,\quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1,x)=y_2,\quad\ldots\quad f_{\mathfrak{a}_l}(y_l,x)=s,\quad F_{m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l}(s,x),$

wo $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\ldots l)$ ein normaler Differentialausdruck $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l}$ ein Ausdruck der Form des Ausdruckes F_m in (1.) $(m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten ist, und entweder $m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l=0$, oder, wenn diese Zahl grösser als Null ist, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l}$ nicht unter einer Form, die wie (6.) beschaffen ist, dargestellt werden kann.

Ein Differentialausdruck der Form

(9.) $f_{\mathfrak{a}_0}(y,x)=y_1,\quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1,x)=y_2,\quad\ldots\quad f_{\mathfrak{a}_{l-1}}(y_{l-1},x)=y_l,\quad f_{\mathfrak{a}_l}(y_l,x),$

worin $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\ldots l)$ ein Ausdruck der Form $F_m(y,x)$ in (1.) $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung ist, heisse ein ***System homogener linearer Differentialausdrücke***, demnach, wenn $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\ldots l)$ ein normaler Differentialausdruck ist, heisse der Ausdruck (9.) ***ein System normaler Differentialausdrücke;*** die Ausdrücke $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\ldots l)$ heissen ***die Bestandtheile*** des Systems. Die Anzahl der Bestandtheile kann $\geqq 1$ sein.

Im Folgenden werden nun allgemeine Methoden entwickelt, um bei einem Differentialausdrucke $F_m(y,x)$ der Form in (1.) mit rationalen Coefficienten zu untersuchen, ob sich derselbe unter der Form (8.) darstellen lässt, und welche diese Darstellungen sind. Es werden dann die verschiedenen derartigen Darstellungen des Ausdruckes mit einander verglichen und die Integrale der Differentialgleichung $F_m=0$, wo F_m unter der Form (8.) vorausgesetzt ist, untersucht.

2.

Der weiteren Untersuchung über die vorhin bezeichneten Differentialgleichungen werden folgende allgemeine Betrachtungen über lineare Differentialgleichungen vorausgeschickt.

I. Die beiden Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_my=\Phi_m(y,x)=0,$$

$$(2.)\qquad \frac{d^ny}{dx^n}+q_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+q_ny=\Psi_n(y,x)=0$$

haben beliebige stetige und differentiirbare Coefficienten. Die Integrale der beiden Differentialgleichungen seien von einander linearunabhängig. *Diese Integrale sollen in einer homogenen linearen Differentialgleichung* $(m+n)^{ter}$ *Ordnung* $F_{m+n}(y,x)=0$ *vereinigt werden.* Setzt man in $\Phi_m(y,x)=s$ für y

die n linearunabhängigen Integrale von (2.), so erhält man s_1 bis s_n von Null verschieden und unter einander linearunabhängig. (Vgl. Abh. Bd. 85 No. 2, Gl. 2.) Diese Grössen erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $\psi_n(s, x) = 0$, welche aufzusuchen ist. Alsdann stellt die aus dem System $\Phi_m(y, x) = s$, $\psi_n(s, x) = 0$ hervorgehende Differentialgleichung $F_{m+n}(y, x) = 0$ die gesuchte dar; der Coefficient der höchsten Ableitung in derselben wird gleich 1 gesetzt. Wenn nun in $\Phi_m(y, x) = s$ die Differentialquotienten von höherer, als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung vermittelst der Differentialgleichung (2.) durch solche der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und niedrigerer Ordnungen ausgedrückt werden, so gehe $\Phi_m(y, x) = s$ über in

$$(3.)\qquad Q_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+Q_ny = s,$$

wo die Grössen Q nicht alle gleich Null sein können. Differentiirt man die Differentialgleichung (3.) successive n mal und reducirt nach jeder Differentiation die Ordnung mittels der Differentialgleichung (2.), so erhalte man

$$(4.)\qquad Q_1^{(\alpha)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q_2^{(\alpha)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+Q_n^{(\alpha)}y = \frac{d^\alpha s}{dx^\alpha}\qquad (\alpha = 1\ldots n).$$

Aus dem System der Gleichungen (3.) und (4.) geht durch Elimination der Grössen y bis $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ die Differentialgleichung hervor:

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n & s \\ Q_1^{(1)} & Q_2^{(1)} & \cdots & Q_n^{(1)} & \frac{ds}{dx} \\ \vdots & \vdots & & & \\ Q_1^{(n)} & Q_2^{(n)} & \cdots & Q_n^{(n)} & \frac{d^ns}{dx^n} \end{vmatrix} = 0,$$

welcher die Grössen s_1 bis s_n genügen müssen. Der Coefficient von $\frac{d^ns}{dx^n}$ in Gleichung (5.) ist nicht identisch Null. Es werde dieser Coefficient, die Determinante $\Sigma\pm Q_1Q_2^{(1)}\ldots Q_n^{(n-1)}$, durch D bezeichnet. Wäre nun $D = 0$, so könnte man die Grössen y bis $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ aus den n ersten Gleichungen (3.) und (4.) eliminiren und erhielte

$$(6.)\qquad \frac{\partial D}{\partial Q_\alpha^{(n-1)}}\frac{d^{n-1}s}{dx^{n-1}}+\frac{\partial D}{\partial Q_\alpha^{(n-2)}}\frac{d^{n-2}s}{dx^{n-2}}+\cdots+\frac{\partial D}{\partial Q_\alpha}s = 0\qquad (\alpha = 1\ldots n).$$

In dieser Differentialgleichung müssten sämmtliche Coefficienten gleich Null sein, da derselben die n linearunabhängigen Grössen s_1 bis s_n genügen würden (Vgl. Abh. Bd. 75 No. 2, Gl. 2). Es wäre also

$$(7.)\qquad \frac{\partial D}{\partial Q_\alpha^{(n-1)}} = 0\qquad (\alpha = 1\ldots n).$$

Hieraus würde sich weiter ergeben, dass man aus den $n-1$ ersten Gleichungen (3.) und (4.) die Grössen y bis $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ eliminiren könnte, und man würde durch gleiche Betrachtungen, wie die bei Differentialgleichung (6.) angewandten, finden, dass

$$(8.)\qquad \frac{\partial^2 D}{\partial Q_\alpha^{(n-1)}\partial Q_\beta^{(n-2)}} = 0 \quad \left(\alpha \gtrless \beta,\ \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1\dots n\right)$$

sein müsste. In dieser Weise weiter schliessend würde man folgern, dass alle Grössen Q in Differentialgleichung (3.) Null sein müssten, was nicht der Fall ist. Der Coefficient von $\frac{d^n s}{dx^n}$ in Differentialgleichung (5.) ist also nicht identisch Null, und dividirt man die Gleichung durch diesen Coefficienten, so erhält man die gesuchte Differentialgleichung $\psi_n(s, x) = 0$.

Sind die Coefficienten p und q rational, so werden die Coefficienten in Differentialgleichung (5.) und demnach auch in $F_{m+n} = 0$ rational.

Die Differentialgleichung $F_{m+n}(y, x) = 0$ muss sich ersetzen lassen durch jedes der beiden Systeme

$$(9.)\qquad \begin{cases} \Phi_m(y, x) = s & \psi_n(s, x) = 0 \\ \Psi_n(y, x) = s' & \varphi_m(s', x) = 0, \end{cases}$$

wo $\varphi_m(s', x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit dem Coefficienten von $\frac{d^m s'}{dx^m}$ gleich 1 ist.

II. Zwei Differentialgleichungen $\Phi_m(y, x) = 0$ und $\Psi_n(y, x) = 0$ der Formen (1.) und (2.) mögen k und nicht mehr linearunabhängige Integrale gemeinsam haben. Diese erfüllen (Abh. Bd. 75 No. 2) die homogene lineare Differentialgleichung k^{ter} Ordnung $F_k(y, x) = 0$, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist. Alsdann sind (Abh. Bd. 76 No. 1 u. 2, Bd. 78 No. 2; vgl. diese Abh. No. 7, V) die Differentialgleichungen $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ darstellbar durch

$$(10.)\qquad F_k(y, x) = s \quad \frac{d^{m-k}s}{dx^{m-k}} + a_1 \frac{d^{m-k-1}s}{dx^{m-k-1}} + \dots + a_{m-k}s = \xi_{m-k}(s, x) = 0,$$

$$(11.)\qquad F_k(y, x) = s \quad \frac{d^{n-k}s}{dx^{n-k}} + b_1 \frac{d^{n-k-1}s}{dx^{n-k-1}} + \dots + b_{n-k}s = \zeta_{n-k}(s, x) = 0,$$

wo aus den Gleichungssystemen, welche durch Gleichstellung der Coefficienten gleich hoher Ableitungen auf beiden Seiten der Gleichung

$$\Phi_m(y, x) = \xi_{m-k}(F_k(y, x), x)$$

bezüglich der Gleichung $\Psi_n(y, x) = \zeta_{n-k}(F_k(y, x), x)$ hervorgehen, die Coefficienten a und b eindeutig als ganze rationale Functionen der

Coefficienten p bezüglich q und der Coefficienten in F_k und deren Differentialquotienten bestimmt sind, ebenso die Coefficienten in F_k als ganze rationale Functionen der Grössen p, a bezüglich q, b und deren Differentialquotienten. Nun haben die beiden Differentialgleichungen

$$\xi_{m-k}(s, x) = 0 \quad \text{und} \quad \zeta_{n-k}(s, x) = 0$$

kein gemeinschaftliches Integral. Die Integrale dieser beiden Differentialgleichungen können nach I. in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n-2k)^{\text{ter}}$ Ordnung $f_{m+n-2k}(s, x) = 0$ vereinigt werden. Alsdann sind die k Integrale von $F_k = 0$, ferner die $m-k$ Integrale von $\Phi_m = 0$, welche mit den Integralen von $F_k = 0$ ein System linearunabhängiger Integrale von $\Phi_m = 0$ bilden, endlich die $n-k$ Integrale von $\Psi_n = 0$, welche mit den Integralen von $F_k = 0$ ein System linearunabhängiger Integrale von $\Psi_n = 0$ bilden, vereinigt in der Differentialgleichung

$$(12.) \qquad F_k(y, x) = s, \quad f_{m+n-2k}(s, x) = 0.$$

Um zu erkennen, ob und welche Integrale zwei homogene lineare Differentialgleichungen $\Phi_m(y, x) = 0$ und $\Psi_n(y, x) = 0$ gemeinsam haben, ist (Siehe die Note des Herrn *Brassinne* im Anhange zu *Sturm* Cours d'Analyse T. II, wo auch die in Abtheilung I. dieser No. untersuchte Aufgabe nach anderer Methode behandelt ist), wenn $m \geqq n$, die Identität

$$(13.) \quad \Phi_m(y, x) = \alpha_0 \frac{d^{m-n}\Psi_n}{dx^{m-n}} + \alpha_1 \frac{d^{m-n-1}\Psi_n}{dx^{m-n-1}} + \cdots + \alpha_{m-n}\Psi_n + \beta_0 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \beta_n y$$

aufzustellen, in welcher die Coefficienten α und β eindeutig bestimmt sind. Die gemeinschaftlichen Integrale von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ sind dann auch die gemeinschaftlichen Integrale von $\Psi_n = 0$ und $\beta_0 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \beta_n y = 0$, und man hat, wenn nicht alle Coefficienten β gleich Null sind, auf die beiden letzteren Differentialgleichungen dasselbe Verfahren anzuwenden, bis man zu einem Restausdrucke, der identisch Null ist, gelangt, wo dann die vorhergehende Differentialgleichung die gemeinschaftlichen Integrale enthält. Hierbei ergiebt sich, dass, wenn die Coefficienten in $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ rational sind, auch die Coefficienten in der Differentialgleichung der gemeinschaftlichen Integrale $F_k = 0$ rational sind. Es werden dann auch in $\xi = 0$ und $\zeta = 0$ die Coefficienten rational und zufolge I. auch in $f_{m+n-2k} = 0$.

Hat man also zwei homogene lineare Differentialgleichungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ mit rationalen Coefficienten, so kann man nach dem Vorhergehenden die Differentialgleichung k^{ter} Ordnung ($k \geqq 0$) auf-

stellen, die ihre gemeinschaftlichen Integrale enthält und deren Coefficienten rational sind, alsdann die homogene lineare Differentialgleichung $(m+n-k)^{ter}$ Ordnung bilden, welche die $m+n-k$ linearunabhängigen Integrale der beiden Differentialgleichungen $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ vereinigt enthält; die Coefficienten derselben werden rational.

III. *a.*) In den beiden Differentialgleichungen (1.) und (2.) $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ seien die Coefficienten *rational,* die Integrale der beiden Differentialgleichungen seien von einander linearunabhängig und vereinigt in der homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)^{ter}$ Ordnung $F_{m+n} = 0$, deren Coefficienten rational sind, und in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist. Es werde die Differentialgleichung $F_{m+n}(y, x) = 0$ unter der Form

$$(14.)\qquad \Phi_m(y, x) = s, \quad \psi_n(s, x) = 0$$

dargestellt, wo $\psi_n = 0$ eine Differentialgleichung der Form (1.) n^{ter} Ordnung ist, und die Coefficienten in ψ_n rational sind.

Sind nun in $\psi_n = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung der Form (1.) *und l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten $\psi_l = 0$ enthalten, so hat die Differentialgleichung*

$$(15.)\qquad \Phi_m(y, x) = s, \quad \psi_l(s, x) = 0$$

mit der Differentialgleichung $\Psi_n = 0$ l und nicht mehr linearunabhängige Integrale gemeinsam. Es muss daher nach II. die Differentialgleichung $\Psi_n = 0$ die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung l^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten enthalten.

Denn in einem beliebigen Systeme $m+l$ linearunabhängiger Integrale von (15.) seien m Integrale successive durch m linearunabhängige Integrale y_1 bis y_m von $\Phi_m = 0$ ersetzt; alsdann sei das System der linearunabhängigen Integrale von (15.):

$$(16.)\qquad y_1, \quad y_2, \quad \dots \quad y_m, \quad y_{m+1}, \quad \dots \quad y_{m+l}.$$

Sind nun n linearunabhängige Integrale von $\Psi_n = 0$, Y_1 bis Y_n, so muss y_{m+a} $(a = 1 \dots l)$ unter der Form darstellbar sein:

$$(17.)\qquad y_{m+a} = c_1^{(a)} y_1 + \dots + c_m^{(a)} y_m + C_1^{(a)} Y_1 + \dots + C_n^{(a)} Y_n,$$

wo die Grössen c und C Constanten. Die l Integrale der Differentialgleichung (15.) $y_{m+a} - c_1^{(a)} y_1 - \dots - c_m^{(a)} y_m$ $(a = 1 \dots l)$ sind linearunabhängig, weil die Integrale (16.) linearunabhängig sind, und erfüllen der Gleichung (17.) zufolge die Differentialgleichung $\Psi_n = 0$. Diejenigen linearunabhängigen Integrale von $\Psi_n = 0$, die die Differentialgleichung (15.) erfüllen, geben in

das System (15.) eingesetzt ebenso viele linearunabhängige Werthe von s, die $\psi_l = 0$ erfüllen, es können also nicht mehr als l sein. Die Differentialgleichung (15.) hat daher mit der Differentialgleichung $\Psi_n = 0$ l und nicht mehr linearunabhängige Integrale gemeinsam.

b.) Wenn nun ein Differentialausdruck $\Phi_m(y, x)$ von der Form des Ausdruckes in (1.) mit rationalen Coefficienten, sich nicht unter der Form (10.) $F_k(y, x) = s$, $\xi_{m-k}(s, x)$ darstellen lässt, so dass die Coefficienten in F_k und ξ_{m-k} rational sind, so heisse der Differentialausdruck ein *unzerlegbarer Differentialausdruck*. In diesem Falle kann die Differentialgleichung $\Phi_m = 0$ mit einer Differentialgleichung der Form (2.) $\Psi_n = 0$ mit rationalen Coefficienten kein Integral gemeinsam haben, wenn nicht sämmtliche Integrale von $\Phi_m = 0$ auch $\Psi_n = 0$ erfüllen (II., Gl. (13.)). (Vgl. die oben angeführte Note 3^0 des Herrn *Brassinne* und die Abhandlung des Herrn *Frobenius* Bd. 76 dieses Journals p. 236 und 256).

Aus dem in *a.*) Bewiesenen folgt nun:

Ist der Differentialausdruck Ψ_n in III, *a.*) *ein unzerlegbarer Differentialausdruck, so ist auch der Differentialausdruck ψ_n in Gleichung* (14.) *unzerlegbar.*

c.) *Ist ausser Ψ_n auch der Differentialausdruck Φ_m in* III, *a.*) *unzerlegbar und enthält die Differentialgleichung* (14.) $F_{m+n} = 0$ *die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (1.) k^{ter} *Ordnung mit rationalen Coefficienten* $F_k = 0$, *wo F_k unzerlegbar und nicht identisch Φ_m, so ist $k = n$.*

Denn werden die Integrale von $\Phi_m = 0$ und $F_k = 0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+k)^{ter}$ Ordnung $F_{m+k} = 0$, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist, vereinigt, und wird F_{m+n} durch $\Phi_m(y, x) = s$, $\psi_n(s, x)$, F_{m+k} durch $\Phi_m(y, x) = s$, $f_k(s, x)$ nach Gl. (10.) dargestellt, so müssen die Integrale von $f_k = 0$ in $\psi_n = 0$ enthalten sein. Nun ist nach *b.*) ψ_n unzerlegbar, daher f_k identisch ψ_n; also $k = n$. *Ist $m \lesseqgtr n$, so muss F_k identisch Ψ_n sein,* weil sonst durch Vereinigung der Integrale von $F_k = 0$ und $\Psi_n = 0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(k+n)^{ter}$ Ordnung und dieselben Betrachtungen, wie vorhin, sich ergeben würde $k = m$. *Ist $m = n$, so braucht F_k nicht identisch Ψ_n zu sein.* Denn nimmt man einen unzerlegbaren Differentialausdruck $X_m(Y, x)$ (dass es bei beliebigem m solche giebt, wird in No. 8, I gezeigt) und bildet die Ausdrücke $R X_m(R^{-1} y, x) = \Phi_m(y, x)$ und $R_1 X_m(R_1^{-1} y, x) = \Psi_m(y, x)$, wo R und R_1 rationale Functionen sind und nicht $R = c R_1$, wo c eine Constante ist, so sind Φ_m und Ψ_m unzerlegbar und nicht identisch, wie aus dem Coefficienten

von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ hervorgeht. Sind die Integrale von $\Phi_n = 0$ und $\Psi_n = 0$ in der homogenen linearen Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{2n} = 0$ vereinigt, so enthält letztere Differentialgleichung auch die Integrale von $R_2 X_n(R_2^{-1} y, x) = 0$, wo $R_2 = c_1 R + c_2 R_1$, c_1 und c_2 Constanten sind. Der Ausdruck $R_2 X_n(R_2^{-1} y, x)$ ist unzerlegbar und, wenn c_1 und c_2 von Null verschieden, nicht identisch mit Φ_n oder Ψ_n.

3.

Es werden jetzt nachstehende Sätze entwickelt, die im Folgenden zur Anwendung kommen.

I. In der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = \Phi_n(y, x) = 0$$

seien die Coefficienten rational und in der Differentialgleichung

$$(2.)\quad \frac{d^s y}{dx^s} + q_1 \frac{d^{s-1} y}{dx^{s-1}} + \cdots + q_s y = \Psi_s(y, x) = 0$$

sei der Ausdruck Ψ_s normal, die Integrale der beiden Differentialgleichungen seien von einander linear unabhängig. Werden diese Integrale nach No. 2. I in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(n+s)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{n+s} = 0$ vereinigt, deren Coefficienten rational sein müssen und in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist, und wird F_{n+s} auf die Form gebracht

$$(3.)\quad \Phi_n(y, x) = s,\quad \psi_s(s, x),$$

wo ψ_s ein Differentialausdruck von der Form von Φ_n s^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten (No. 2. Gl. 10), *so ist ψ_s ein normaler Differentialausdruck und enthält denselben determinirenden Factor, wie Ψ_s.*

Das vollständige Integral von (2.) hat die Form

$$(4.)\quad \Omega(c_1 \bar{y}_1 + \cdots + c_s \bar{y}_s),$$

wo Ω der determinirende Factor in Ψ_s, $\bar{y}_1$ bis $\bar{y}_s$ die s linear-unabhängigen regulären Integrale von $\bar{\Psi}_s(\bar{y}, x) = 0$ sind, wenn $\bar{\Psi}_s(\bar{y}, x)$ der reguläre Differentialausdruck in Ψ_s ist. Wird der Ausdruck (4.) bei einem Punkte im Endlichen für y in $\Phi_n(y, x) = s$ eingesetzt, so erhält man

$$(5.)\quad s = \Omega(c_1 \bar{s}_1 + \cdots + c_s \bar{s}_s),$$

wo die Grössen $\bar{s}_1$ bis $\bar{s}_s$ die s linear-unabhängigen Integrale der Differentialgleichung $\Omega^{-1} \psi_s(\Omega \bar{s}, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten sind. Diese

Integrale verhalten sich regulär (vgl. Abh. Bd. 81, p. 27); daher ist der charakteristische Index in der Differentialgleichung $\Omega^{-1}\psi_n(\Omega\bar{s}, x) = 0$ bei diesem Punkte gleich Null.

Für $x = t^{-1}$ hat man (Abh. Bd. 78, No. 2, Gl. (12.) etc.), wenn $\Phi_m(y, t^{-1}) = (-t^2)^m \Phi'_m(y, t)$, $\psi_n(y, t^{-1}) = (-t^2)^n \psi'_n(y, t)$, $t^{-2m}\psi'_n(t^{2m}u, t) = \psi''(u, t)$ und $F_{m+n}(y, t^{-1}) = (-t^2)^{m+n} F'_{m+n}(y, t)$ gesetzt werden, den Differentialausdruck $F'_{m+n}(y, t)$ dargestellt durch

$$(6.)\qquad \Phi'_m(y, t) = u, \quad \psi''_n(u, t).$$

Setzt man nun den Ausdruck (4.) bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ in (6.) für y ein und bezeichnet durch Ω' den Ausdruck Ω, worin $x = t^{-1}$ gesetzt ist, so erhält man

$$(7.)\qquad u = \Omega'(c_1\bar{u}_1 + \cdots + c_n\bar{u}_n),$$

wo die Grössen $\bar{u}$ linear-unabhängig sind, bei $t = 0$ sich regulär verhalten und die Integrale von $\Omega'^{-1}\psi''_n(\Omega'\bar{u}, t) = 0$ sind. Der charakteristische Index in dieser Differentialgleichung bei $t = 0$ ist also Null. Daher ist dieses auch der Fall in der Differentialgleichung $t^{2m}\Omega'^{-1}\psi''_n(\Omega t^{-2m}u, t) = \Omega'^{-1}\psi'_n(\Omega' u, t) = 0$; oder in der Differentialgleichung $\Omega^{-1}\psi_n(\Omega u, x) = 0$ für $x = t^{-1}$, $t = 0$. Der Differentialausdruck $\Omega^{-1}\psi_n(\Omega\bar{s}, x)$ ist also regulär und $\psi_n(s, x)$ normal mit dem determinirenden Factor Ω.

II. Hat ein normaler Differentialausdruck $\Phi_m(y, x)$ mit dem determinirenden Factor Ω die Darstellung

$$(8.)\qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1, \quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad f_{\mathfrak{a}_l}(y_l, x) = \Phi_m(y, x),$$

wo $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k = 0 \ldots l)$ ein homogener linearer Differentialquotientenausdruck $\mathfrak{a}_k{}^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und der Coefficient der höchsten Ableitung in demselben gleich Eins ist, ***so muss $f_{\mathfrak{a}_k}$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω sein.***

Denn aus (8.) leitet man her

$$(9.)\quad \Omega^{-1}f_{\mathfrak{a}_0}(\Omega\bar{\bar{y}}, x) = \bar{\bar{y}}_1,\ \Omega^{-1}f_{\mathfrak{a}_1}(\Omega\bar{y}_1, x) = \bar{y}_2, \ldots \Omega^{-1}f_{\mathfrak{a}_l}(\Omega\bar{\bar{y}}_l, x) = \Omega^{-1}\Phi_m(\Omega\bar{\bar{y}}, x).$$

Hier ist $\Omega^{-1}\Phi_m(\Omega\bar{y}, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, also in der Differentialgleichung $\Omega^{-1}\Phi_m(\Omega\bar{\bar{y}}, x) = 0$ bei jedem Punkte der charakteristische Index gleich Null. Hat man nun ein System homogener linearer Differentialausdrücke (No. 1, Fl. 9) mit rationalen Coefficienten, so ist bei jedem Punkte im Endlichen oder Unendlichen der charakteristische

Index in der Differentialgleichung, die aus dem gleich Null gesetzten Systeme hervorgeht, gleich der Summe der charakteristischen Indices in den Differentialgleichungen, die aus den gleich Null gesetzten Bestandtheilen erhalten werden (Abh. Bd. 76, No. 3; Bd. 78, No. 2, Gl. (15.)). Daher ist auch in Differentialgleichung $\Omega^{-1} f_{a_k}(\Omega \bar{y}, x) = 0$ $(k = 0, \dots l)$ bei jedem Punkte der charakteristische Index gleich Null; also $f_{a_k}(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω.

III. Folgender Satz ist ein specieller Fall eines allgemeineren, der in No. 7, IV, *c.*) bewiesen wird, und kommt erst, nachdem letzterer bewiesen ist, zur Anwendung. Es wird hier ein von dem Beweise des allgemeineren Satzes unabhängiger Beweis des speciellen gegeben.

Sind in mehreren normalen Differentialausdrücken $f_{a_0}(y, x)$, $f_{a_1}(y_1, x)$ bis $f_{a_l}(y_l, x)$ die determinirenden Factoren von einander verschieden, so sind die Integrale der Differentialgleichungen $f_{a_0} = 0$ bis $f_{a_l} = 0$ von einander linearunabhängig.

Die determinirenden Factoren seien e^{W_1} bis e^{W_l}, wo eine der Grössen W auch Null sein kann. Wenn nun in einem Gebiete von x eine Gleichung $\sum_1^l c_b y_b = 0$ besteht, worin y_b Integral von $f_{a_b} = 0$ ist, die Grössen c Constanten, die nicht alle gleich Null sind, so besteht diese Gleichung, wenn die Integrale als analytische Functionen auf demselben Wege fortgesetzt werden, für jedes x. In der Umgebung eines Punktes im Endlichen oder Unendlichen, in welchem eine der Grössen W unendlich wird, muss derjenige Theil der Gleichung $\sum_1^l c_b y_b = 0$ für sich verschwinden, welcher die Integrale von solchen Differentialgleichungen enthält, in denen die in Partialbrüche zerlegten Functionen W die Glieder, die in diesem Punkte unendlich werden, übereinstimmend haben.

Denn sei dieser Punkt der Punkt $x = a$ im Endlichen, so nehme man die Entwickelungen der Integrale bei $x = a$. Diese haben die Form, die Abh. Bd. 74, No. 1, Fl. (5.) angegeben ist. Fasst man dann in Gleichung $\sum_1^l c_b y_b = 0$ diejenigen Glieder zusammen, in denen die Exponenten in den Potenzen $(x-a)^r$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so muss deren Summe nach dem in Abh. Bd. 74, No. 1, Fl. (5.) Bewiesenen für sich verschwinden. In einer solchen Summe muss wiederum die Summe derjenigen Glieder, die mit derselben Potenz des $\log(x-a)$ multiplicirt sind, verschwinden. Jede der letzteren Summen nimmt aber folgende Form an. Es sei in der in Partialbrüche zerlegten Function W_a derjenige Theil, der für $x = a$ un-

endlich wird, durch w_a bezeichnet, und w_a gleich Null gesetzt, wenn W_a für $x=a$ nicht unendlich wird. Dann hat eine solche Summe die Form:

$$(10.)\qquad (x-a)^r \sum_1^l c_b e^{w_b} \varphi_b(x),$$

wo $\varphi(x)$ von der Form $\sum_0^\infty k_a(x-a)^a$ ist, einzelne der Grössen φ_b auch Null sein können. Nun kann eine Gleichung der Form

$$(11.)\qquad \sum_1^m C_b e^{v_b} \psi_b(x) = 0,$$

in welcher die C_b von Null verschiedene Constanten sind, die Grössen v_b Null oder von der Form $\sum_1^n k_{-a}(x-a)^{-a}$ und alle unter einander verschieden sind, die Grössen $\psi_b(x)$ die Form $\sum_0^\infty k_a(x-a)^a$ haben und von Null verschieden sind, nicht bestehen. Denn man kann die m Grössen $e^{v_b}\psi_b(x)$ auf die Form bringen

$$(12.)\quad e^{v_1}\psi_1(x),\ e^{v_1}\psi_1(x)\int e^{v_2-v_1}\chi_2(x)dx,\ e^{v_1}\psi_1(x)\int dx\, e^{v_2-v_1}\chi_2(x)\int e^{v_3-v_2}\chi_3(x)\,dx,\ \text{etc.},$$

wo die Grössen $\chi(x)$ die Form $\sum_0^\infty k_a(x-a)^a$ haben und von Null verschieden sind, da $\frac{d\log}{dx} e^u \xi(x)$ von Null verschieden ist, wo u die Form $\sum_1^n k_{-a}(x-a)^{-a}$; $\xi(x)$ die Form $\sum_0^\infty k_a(x-a)^a$ hat. Setzt man die Grössen (12.) in Gleichung (11.) ein, so ergiebt sich aus der Form von (12.), dass die Gleichung (11.) nicht bestehen kann. Aus der Verbindung der vorstehenden Resultate ergiebt sich nun, dass in $\sum_1^l c_b y_b = 0$ derjenige Theil, in welchem die Grössen w bei dem Punkte $x=a$ übereinstimmen, für sich verschwinden muss. Entsprechend ist es bei dem Punkte $x=t^{-1}$, $t=0$. Nimmt man nun in $\sum_1^l c_b y_b = 0$ ein solches Integral y_k, bei welchem c_k nicht verschwindet, und wendet das vorhin Bewiesene successive bei allen Punkten an, in denen die Grösse W_k sich von je einer der anderen Grössen W unterscheidet, so ergiebt sich, dass $c_k y_k$ Null sein müsste, was nicht der Fall ist.

4.

Der Differentialausdruck $F_m(y,x)$ in der homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $F_m(y,x)=0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 sei dargestellt durch

$$(1.)\quad f_{a_0}(y,x)=y_1,\quad f_{a_1}(y_1,x)=y_2,\quad \dots\quad f_{a_l}(y_l,x)=s,\quad F_{m-a_0-\dots-a_l}(s,x),$$

wo $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\dots l)$ ein normaler Differentialausdruck von $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung ist, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_l}(s,x)$ ein Ausdruck von der Form von F_m und $(m-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_l)^{\text{ter}}$ Ordnung mit Coefficienten, die rational sein müssen, und entweder $m-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_l=0$ ist oder, wenn diese Zahl grösser als Null ist, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_l}=0$ nicht die Integrale einer Differentialgleichung, in welcher ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist, enthält.

Es sei ferner das System normaler Differentialausdrücke

$$(2.)\qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y,x)=y_1,\quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1,x)=y_2,\quad \dots\quad f_{\mathfrak{a}_{l-1}}(y_{l-1},x)=y_l,\ f_{\mathfrak{a}_l}(y_l,x)$$

gleich dem Ausdrucke

$$\Phi_N(y,x)\quad \text{wo}\quad N=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\dots+\mathfrak{a}_l.$$

Wenn ein normaler Differentialausdruck nicht unzerlegbar ist (No. 2, III, *b.*), so ist er einem Systeme unzerlegbarer normaler Ausdrücke gleich, die alle denselben determinirenden Factor, wie der zusammengesetzte Ausdruck, enthalten (No. 3, II). Es kann daher der Ausdruck $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\dots l)$ in (1.) und (2.) als unzerlegbar vorausgesetzt werden, was in den Sätzen dieser No. geschehen soll.

I. ***Wenn nun in der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\psi_\alpha(y,x)=0$ enthalten sind, wo ψ_α ein unzerlegbarer normaler Differentialausdruck α^{ter} Ordnung ist, so hat der Ausdruck $\Phi_N(y,x)$ eine solche durch ein System normaler Differentialausdrücke gegebene Darstellung, in welcher ψ_α an der Spitze des Systemes steht.***

Sind die unzerlegbaren Differentialausdrücke ψ_α und $f_{\mathfrak{a}_0}$ nicht identisch, so sind die Integrale von $\psi_\alpha=0$ und $f_{\mathfrak{a}_0}=0$ von einander linearunabhängig (No. 2, III, *b.*). Diese Integrale werden nun nach No. 2, I in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(\mathfrak{a}_0+\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{\mathfrak{a}_0+\alpha}=0$ vereinigt, in der $F_{\mathfrak{a}_0+\alpha}$ dargestellt wird durch die Ausdrücke:

$$(3.)\qquad F_{\mathfrak{a}_0+\alpha}(y,x)=\begin{cases} f_{\mathfrak{a}_0}(y,x)=y_1, & \psi_\alpha^{(1)}(y_1,x), \\ \psi_\alpha(y,x)=y_1', & \varphi_{\mathfrak{a}_0}(y_1',x), \end{cases}$$

wo (No. 3, I) $\psi_\alpha^{(1)}$ ein normaler Ausdruck von der Ordnung α mit dem determinirenden Factor von ψ_α, $\varphi_{\mathfrak{a}_0}$ ein normaler Ausdruck von der Ordnung $\mathfrak{a}_0$ mit dem determinirenden Factor von $f_{\mathfrak{a}_0}$ ist und beide Ausdrücke unzerlegbar sind (No. 2, III, *b.*).

Die Integrale von $\psi_\alpha^{(1)}(y,x)=0$ erfüllen die Differentialgleichung

$$(4.)\qquad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1,x)=y_2,\quad \dots\quad f_{\mathfrak{a}_l}(y_l,x)=s,\quad F_{m-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_l}(s,x)=0$$

(No. 2, I Anfang, oder No. 2, II, Gl. (10.)). Ist nun $\psi_\alpha^{(1)}$ nicht identisch

f_{a_1}, so sind die Integrale von $\psi_\alpha^{(1)} = 0$ und $f_{a_1} = 0$ von einander linear-unabhängig. Dieselben werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(a_1+\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung $G_{a_1+\alpha} = 0$ vereinigt, in welcher $G_{a_1+\alpha}$ dargestellt wird durch die Ausdrücke:

$$(5.)\qquad G_{a_1+\alpha}(y_1, x) = \begin{cases} f_{a_1}(y_1, x) = y_2, & \psi_\alpha^{(2)}(y_2, x), \\ \psi_\alpha^{(1)}(y_1, x) = y_2', & \varphi_{a_1}(y_2', x), \end{cases}$$

wo $\psi_\alpha^{(2)}$ ein normaler Ausdruck α^{ter} Ordnung mit dem determinirenden Factor von $\psi_\alpha^{(1)}$ und φ_{a_1} ein normaler Ausdruck a_1^{ter} Ordnung mit dem determinirenden Factor von f_{a_1} ist, $\psi_\alpha^{(2)}$ und φ_{a_1} unzerlegbar sind. Das System $f_{a_0}(y, x) = y_1$, $f_{a_1}(y_1, x) = y_2$, $\psi_\alpha^{(2)}(y_2, x)$ hat nun die Darstellungen:

$$(6.)\qquad F_{a_0+a_1+\alpha}(y, x) = \begin{cases} f_{a_0}(y, x) = y_1, & f_{a_1}(y_1, x) = y_2, & \psi_\alpha^{(2)}(y_2, x), \\ f_{a_0}(y, x) = y_1, & \psi_\alpha^{(1)}(y_1, x) = y_2', & \varphi_{a_1}(y_2', x), \\ \psi_\alpha(y, x) = y_1', & \varphi_{a_0}(y_1', x) = y_2', & \varphi_{a_1}(y_2', x). \end{cases}$$

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, findet man eine der Zusammenstellung (6.) entsprechende Zusammenstellung von Systemen, in welcher der letzte Bestandtheil des Systemes in der ersten Zeile einer der Ausdrücke f_{a_k} $(k = 0 \ldots l)$ ist, wegen der über $F_{m-a_0-\ldots-a_l}(s, x)$ gemachten Voraussetzung. Alsdann ergiebt sich aus dem Vergleiche des Systemes in der ersten Zeile dieser Zusammenstellung mit dem Systeme in der letzten Zeile der Zusammenstellung, dass es ein System normaler Differentialausdrücke giebt, in welchem ψ_α an der Spitze steht, und welches den Differentialausdruck Φ_N darstellt.

II. Aus dem Satze in I folgt weiter:

Wenn in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\Psi_n(y, x) = 0$ enthalten sind, in welcher der Ausdruck von Ψ_n durch ein System normaler Differentialausdrücke gegeben ist, so ist der Ausdruck Φ_N durch ein solches System normaler Differentialausdrücke darstellbar, unter dessen Bestandtheilen die Bestandtheile des Ausdruckes von Ψ_n in derselben Reihenfolge zu Anfang stehen.

Wenn also der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ in irgend einer Weise durch ein System von homogenen linearen Differentialausdrücken, das wie das System (1.) beschaffen ist, dargestellt wird, und das in diesem Systeme enthaltene System normaler Differentialausdrücke herausgenommen wird, so stellt dasselbe einen Differentialausdruck dar, der dem Ausdrucke $\Phi_N(y, x)$ gleich ist. (Vgl. Abh. Bd. 76, No. 5).

Es ist also jetzt dieser Differentialausdruck Φ_N aufzusuchen. Dies kommt darauf hinaus zu ermitteln, ob eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gesetzt ist, $F_m(y, x) = 0$ sich darstellen lässt unter der Form

$$(7.)\qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x) = 0,$$

so dass F_{m-k} ein normaler Ausdruck, f_k ein Ausdruck von der Form von F_m und k^{ter} Ordnung ist. Diese Untersuchung wird in den beiden folgenden Nummern durchgeführt.

5.

Wenn

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = F_m(y, x) = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten ist und der grösste charakteristische Index H in derselben die Bedingung $H < m$ erfüllt, so soll untersucht werden, ob dieselbe sich unter der Form

$$(2.)\qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x) = 0$$

darstellen lässt, so dass F_{m-k} ein regulärer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, f_k ein Ausdruck der Form (1.) *k^{ter} Ordnung mit Coefficienten, die rational sein müssen.*

Alsdann muss $k \geqq H$ sein (Abh. Bd. 75, No. 1, I.).

Der Fall $k = H$ ist in Abh. Bd. 81, No. 5 erledigt und der allgemeine wird unter Zugrundelegung der dort angewandten Methode in folgender Weise behandelt.

I. Es sei

$$(3.)\qquad \begin{cases} F_{m-k}(y, x) = \dfrac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} + p_1^{(k)} \dfrac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}} + \cdots + p_{m-k}^{(k)} y, \\[2ex] f_k(s, x) = \dfrac{d^k s}{dx^k} + g_1 \dfrac{d^{k-1}s}{dx^{k-1}} + \cdots + g_k s \end{cases}$$

und es werde

$$(4.)\qquad z_a + r\frac{dz_{a-1}}{dx} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{d^2 z_{a-2}}{dx^2} + \cdots + \frac{d^r z_{a-r}}{dx^r} = \left(1 + \frac{dz_a}{dx}\right)_r$$

gesetzt. Damit sich die Differentialgleichung (1.) durch ein System der Form (2.), (3.), in dem die Coefficienten $p^{(k)}$ rationale, die g analytische Functionen sein sollen, ersetzen lässt, ist (Abh. Bd. 75, No. 2, Gl. (2.)) nothwendig und hinreichend, dass das aus der Identität $F_m(y, x) = f_k(F_{m-k}(y, x), x)$ zwischen

den Coefficienten hervorgehende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$(5.)\quad \begin{cases} p_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=k} \left(1+\frac{d}{dx}p_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}^{(k)}\right)_{k-\mathfrak{b}} g_{\mathfrak{b}}, \quad (\mathfrak{a}=1\dots m) \\ g_0 = p_0^{(k)} = 1, \quad p_{-1}^{(k)} = p_{-2}^{(k)} = \dots = p_{-k+1}^{(k)} = p_{m-k+1}^{(k)} = p_{m-k+2}^{(k)} = \dots = p_m^{(k)} = 0, \end{cases}$$

aus welchem Systeme die Grössen g als rationale Functionen hervorgehen.

Es werden nun die Ausdrücke für die Coefficienten $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ $(\mathfrak{b}=1\dots k)$, wenn F_{m-k} regulär sein soll, bestimmt, dieselben in das Gleichungssystem (5.) eingesetzt und aus diesem Gleichungssysteme die Ausdrücke für die Coefficienten $g_{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b}=1\dots k)$ und die übrigen Coefficienten $p^{(k)}$ ermittelt, alsdann aus dem Gleichungssysteme (5.) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen des Systemes (2.), so dass F_{m-k} ein regulärer Differentialausdruck ist, hergeleitet.

Die Differentialgleichung $F_m=0$ besitze im Endlichen $\varkappa$ $(\varkappa \geqq 0)$ singuläre Punkte, die, wenn $\varkappa > 0$, a_1 bis $a_\varkappa$ seien. Die Differentialgleichung $F_{m-k}=0$ habe im Endlichen λ $(\lambda \geqq 0)$ singuläre Punkte, die in $F_m=0$ nicht vorkommen, und dieselben seien, wenn $\lambda > 0$ ist: $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\lambda}$.

Wenn $\varkappa+\lambda=0$ *ist,* so müssen die Coefficienten $p_{\mathfrak{a}}^{(k)}$ $(\mathfrak{a}=1\dots m-k)$ gleich Null sein, und es ist nothwendig und hinreichend, dass das Gleichungssystem (5.) erfüllt ist.

Wenn $\varkappa+\lambda>0$ *ist,* so muss $p_1^{(k)}$ die Form haben

$$(6.)\qquad p_1^{(k)} = \sum_1^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}.$$

Hier ist, wenn $\varkappa > 0$, ***zuerst der Coefficient*** $\alpha_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\dots\varkappa)$ (der auch Null sein darf) ***zu bestimmen.***

Die determinirende Fundamentalgleichung zur Differentialgleichung $F_{m-k}=0$ bei dem Punkte $a_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\dots\varkappa)$ ist

$$(7.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-k)+1)+[p_1^{(k)}(x-a_{\mathfrak{a}})]_{x=a_{\mathfrak{a}}} r(r-1)\dots(r-(m-k)+2)+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+[p_{m-k}^{(k)}(x-a_{\mathfrak{a}})^{m-k}]_{x=a_{\mathfrak{a}}} = 0. \end{cases}$$

Die determinirende Fundamentalgleichung zur Differentialgleichung $F_m=0$ bei dem Punkte $a_{\mathfrak{a}}$, wo der charakteristische Index $h_{\mathfrak{a}} \leqq k$, ist

$$(8.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-h_{\mathfrak{a}})+1)+\left[\frac{p_{h_{\mathfrak{a}}+1}}{p_{h_{\mathfrak{a}}}}(x-a_{\mathfrak{a}})\right]_{x=a_{\mathfrak{a}}} r(r-1)\dots(r-(m-h_{\mathfrak{a}})+2)+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+\left[\frac{p_m}{p_{h_{\mathfrak{a}}}}(x-a_{\mathfrak{a}})^{m-h_{\mathfrak{a}}}\right]_{x=a_{\mathfrak{a}}} = 0. \end{cases}$$

Die $m-k$ Wurzeln von (7.) sind ebenso viele Wurzeln von (8.) (Vgl. Abh.

Bd. 81. No. 2). Hieraus ergiebt sich

$$(9.)\quad \alpha_{\mathfrak{a}} = \left[p_1^{(i)}(x-a_{\mathfrak{a}})\right]_{x=a_{\mathfrak{a}}} = \frac{(n-k)(n-i-1)}{2} - R_{\mathfrak{a}}^{(n-i)}, \quad (\mathfrak{a}=1\dots z)$$

wo $R_{\mathfrak{a}}^{(n-i)}$ die Summe von $n-k$ Wurzeln der Gleichung (8.) ist. Aus Gleichung (8.) ergeben sich höchstens

$$(10.)\quad \frac{(n-k_{\mathfrak{a}})(n-k_{\mathfrak{a}}-1)\dots(n-k_{\mathfrak{a}}-(n-i)-1)}{1.2\dots(n-i)}$$

verschiedene Werthe von $R_{\mathfrak{a}}^{(n-i)}$ und dann aus (9.) die möglichen Werthe von $\alpha_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\dots z)$.

Mit diesen Werthen von $\alpha_{\mathfrak{a}}$ bildet man nun die Ausdrücke $\sum_1^z \frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}$ und erhält eine endliche Anzahl Ausdrücke, unter denen die in $p_1^{(i)}$ existirenden Werthe von $\sum_1^z \frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}$ sich befinden.

Bei $z=0$ tritt an Stelle dieses Theiles von $p_1^{(i)}$ Null ein.

Jeder beliebige dieser Ausdrücke wird herausgenommen und der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt.

Alsdann ist zu ermitteln, ob $\iota > 0$ ist, und in diesem Falle sind die Punkte $a_{\mathfrak{a}}$ und Coefficienten $\alpha_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=z+1\dots z+\iota)$ zu bestimmen.

Der Punkt $a_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=z+1\dots z+\iota)$ ist in $F_{n-i}=0$ ausserwesentlich singulär und daher der zugehörige Coefficient $\alpha_{\mathfrak{a}}$ eine *negative ganze Zahl* (vgl. Abh. Bd. 81. No. 1). Demnach ist das Product

$$(11.)\quad \prod_{z+1}^{z+\iota}(x-a_{\mathfrak{a}})^{-\alpha_{\mathfrak{a}}} = \Phi(x)$$

eine ganze rationale Function von dem Grade $-\sum_{z+1}^{z+\iota}\alpha_{\mathfrak{a}}$.

Setzt man in (6.) $x=t^{-1}$, so dass

$$(12.)\quad p_1^{(i)}(t^{-1}) = \sum_1^{z+\iota}\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}t}{1-a_{\mathfrak{a}}t}$$

entsteht, so ergiebt sich aus (12.), dass

$$(13.)\quad -\left(\frac{p_1^{(i)}(t^{-1})}{t}\right)_{t=0} + \sum_1^z \alpha_{\mathfrak{a}} = \tau$$

entweder Null oder eine positive ganze Zahl $-\sum_{z+1}^{z+\iota}\alpha_{\mathfrak{a}}$ sein muss. Um die möglichen Werthe von τ zu ermitteln, sind die von $-\left(\frac{p_1^{(i)}(t^{-1})}{t}\right)_{t=0}$ zu bestimmen. Es werde

$$(14.)\quad \begin{cases} F_n(y,t^{-1}) = (-t^2)^n F_n(y,t), \\ F_{n-k}(y,t^{-1}) = (-t^2)^{n-k}F_{n-k}(y,t) \end{cases}$$

gesetzt und der Coefficient von $\frac{d^{m-a}y}{dt^{m-a}}$ in F'_m durch p'_a, der Coefficient von $\frac{d^{m-k-a}y}{dt^{m-k-a}}$ in F'_{m-k} durch $p_a^{(k)'}$ bezeichnet (die Formel für F'_m siehe Abh. Bd. 78, No. 1, Gl. (15.)).

Nun ist zunächst

$$(15.)\qquad \left[\frac{p_1^{(k)}(t^{-1})}{t}\right]_{t=0} = (m-k)(m-k-1)-[tp_1^{(k)'}]_{t=0}.$$

Es sind daher die möglichen Werthe von $[tp_1^{(k)'}]_{t=0}$ aufzusuchen.

Die determinirende Fundamentalgleichung zu $F'_{m-k}(y,t)=0$ bei $t=0$ ist

$$(16.)\quad r(r-1)\dots(r-(m-k)+1)+[tp_1^{(k)'}]_{t=0}r(r-1)\dots(r-(m-k)+2)+\dots+[t^{m-k}p_{m-k}^{(k)'}]_{t=0}=0.$$

Die determinirende Fundamentalgleichung zu $F'_m(y,t)=0$ bei $t=0$, wo der charakteristische Index gleich $h_\infty \leqq k$, ist

$$(17.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-h_\infty)+1)+\left[\frac{tp'_{h_\infty+1}}{p'_{h_\infty}}\right]_{t=0} r(r-1)\dots(r-(m-h_\infty)+2)+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+\left[\frac{t^{m-h_\infty}p'_m}{p'_{h_\infty}}\right]_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Die Wurzeln der Gleichung (16.) sind eben so viele Wurzeln der Gleichung (17.). Es wird also

$$(18.)\qquad [tp_1^{(k)'}]_{t=0} = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}-R_\infty^{(m-k)},$$

wo $R_\infty^{(m-k)}$ die Summe von $m-k$ Wurzeln der Gleichung (17.) ist. Verbindet man nun, um τ zu bestimmen, die Gleichungen (13.), (15.) und (18.), so erhält man

$$(19.)\qquad \tau = \sum_1^{\varkappa}\alpha_a-\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}-R_\infty^{(m-k)}.$$

Wenn man also durch die Summen von je $m-k$ Wurzeln der Gleichung (17.) die verschiedenen Werthe von $R_\infty^{(m-k)}$ aufgestellt hat, so ergiebt (19.) die möglichen Werthe von τ. Oder wenn man aus Gleichung (17.) nach bekannten Regeln der Algebra die Gleichung bildet, welche die sämmtlichen Summen von je $m-k$ der $m-h_\infty$ Wurzeln der Gleichung (17.) zu Wurzeln hat, deren Grad $\Gamma=\frac{(m-h_\infty)(m-h_\infty-1)\dots(m-h_\infty-(m-k)+1)}{1.2\dots(m-k)}$ ist, und den Ausdruck $R_\infty^{(m-k)}$ aus (19.) einsetzt, so muss die daraus entstehende Gleichung für τ unter ihren Wurzeln Null oder eine positive ganze Zahl enthalten.

Es seien die möglichen Werthe von τ, die höchstens in der Anzahl Γ auftreten, ermittelt.

Bei $\tau = 0$ ist $\lambda = 0$, bei $\tau > 0$ ist $\lambda > 0$ und τ gleich $-\sum\limits_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\alpha_a$, dem Grade der ganzen rationalen Function $\Phi(x)$ (11.).

Es ist jetzt bei einem ausgewählten Werthe von $\tau > 0$ die zugehörige Function $\Phi(x)$ zu bestimmen.

Zu dem Zwecke werde zunächst vorausgesetzt, dass man bei einem der Punkte a_a ($a = 1 \dots \varkappa$) oder bei dem Punkte $x = t^{-1}$, $t = 0$ die formelle Entwickelung von $p_1^{(k)}$ in eine Potenzreihe bis zu einem beliebigen Gliede berechnen könne. Wie man die formellen Entwickelungen der Coefficienten $p_a^{(k)}$ erhält, wird in Abtheilung II dieser No. gezeigt werden.

Nun werden in Gleichung (6.) die Grössen bei dem betreffenden Punkte entwickelt. Es werde der Fall untersucht, wo bei einem der Punkte a_a ($a = 1 \dots \varkappa$), dem Punkte A, die Entwickelung nach Potenzen von $x - A$ vorgenommen wird. Aus (6.) erhält man

$$(20.)\qquad p_1^{(k)} - \sum_1^{\varkappa}\frac{\alpha_a}{(x-A)-(a_a-A)} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left\{\sum_{a=\varkappa+1}^{a=\varkappa+\lambda}\alpha_a\frac{(x-A)^\nu}{(a_a-A)^{\nu+1}}\right\},$$

wo die Entwickelung auf der linken Seite bekannt ist. Aus Gl. (20.) werden bestimmt die Grössen

$$(21.)\qquad -\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\frac{\alpha_a}{a_a-A},\quad -\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\frac{\alpha_a}{(a_a-A)^2},\quad \dots\quad -\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\frac{\alpha_a}{(a_a-A)^\tau}.$$

Hierzu müssen in der Entwickelung von $p_1^{(k)}$ die $\tau+1$ ersten Glieder von dem Gliede mit der Potenz $\frac{1}{x-A}$ an gerechnet bekannt sein. Durch die Grössen (21.) werden die Coefficienten in der Gleichung

$$(22.)\qquad \prod_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\left(z-\frac{1}{a_a-A}\right)^{-\alpha_a} = \Psi(z) = 0$$

bekannt. Das absolute Glied B in $\Psi(z)$ darf nicht verschwinden, wofern $\Phi(x)$ bestehen soll. Alsdann erhält man aus (22.)

$$(23.)\qquad \frac{(x-A)^\tau}{B}\Psi\left(\frac{1}{x-A}\right) = \Phi(x).$$

Wird in (6.) $x = t^{-1}$ gesetzt und die Entwickelung bei $t = 0$ vorgenommen, so werden (vgl. Abh. Bd. 81, No. 3) die den Grössen (21.) entsprechenden $-\sum\limits_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\alpha_a a_a$ bis $-\sum\limits_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\alpha_a a_a^\tau$ bestimmt und aus diesen direct die Coefficienten der Gleichung $\Phi(x) = 0$ ermittelt. Man kann auch $\Phi(x)$ bestimmen aus der Gleichung

$$(24.)\qquad Ce^{\int\left(p_1^{(k)}-\sum\limits_1^{\varkappa}\frac{\alpha_a}{x-a_a}\right)dx} = \Phi(x),$$

wo für $p_1^{(k)}$ die formelle Entwickelung nach Potenzen von $x - A$ bezüglich

von $\frac{1}{x}$ einzusetzen ist. Die Constante C wird dadurch bestimmt, dass in $\Phi(x)$ der Coefficient x^τ gleich 1 ist.

Aus $\Phi(x)$ erhält man nun

$$(25.)\qquad -\frac{d\log\Phi(x)}{dx} = \sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda}\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}.$$

In diesem Ausdrucke müssen, wenn $p_1^{(k)}$ bestehen soll, die Punkte $a_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=\varkappa+1,\dots\varkappa+\lambda)$ von den Punkten $a_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\dots\varkappa)$ verschieden, die positiven ganzen Zahlen $-\alpha_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=\varkappa+1,\dots\varkappa+\lambda)\leqq k(m-k)$ (vgl. Abh. Bd. 81, No. 1, Gl. (12.)) sein.

Es ist also zu dem ausgewählten Ausdrucke von $\sum_1^{\varkappa}\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}$ *und der ausgewählten Zahl* τ *der Ausdruck von* $p_1^{(k)}$

$$(26.)\qquad p_1^{(k)} = \sum_1^{\varkappa+\lambda}\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}$$

bestimmt.

Nun wird das zu diesem Ausdrucke gehörende System von Ausdrücken für $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ $(\mathfrak{b}=2\dots k)$ *ermittelt.*

$p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ hat die Form

$$(27.)\qquad p_{\mathfrak{b}}^{(k)} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+\lambda}\left\{\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}^{(\mathfrak{b}1)}}{x-a_{\mathfrak{a}}}+\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}^{(\mathfrak{b}2)}}{(x-a_{\mathfrak{a}})^2}+\dots+\frac{\alpha_{\mathfrak{a}}^{(\mathfrak{b}\mathfrak{b})}}{(x-a_{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}}\right\}.$$

Ist nun bei dem Punkte $x=A$ die formelle Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ nach Potenzen von $x-A$ bekannt und multiplicirt man (27.) mit dem Producte

$$(28.)\qquad \prod_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+\lambda}(x-A-(a_{\mathfrak{a}}-A))^{\mathfrak{b}},$$

so erhält man rechts ein Polynom mit den Potenzen $(x-A)^0$ bis $(x-A)^{\mathfrak{b}(\varkappa+\lambda)-1}$, deren Coefficienten die $\mathfrak{b}(\varkappa+\lambda)$ Unbekannten α linear enthalten, und durch Gleichsetzung der Coefficienten gleichhoher Potenzen von $x-A$ auf beiden Seiten ein System von $\mathfrak{b}(\varkappa+\lambda)$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der $\mathfrak{b}(\varkappa+\lambda)$ Unbekannten α. Die Determinante dieses Systems linearer Gleichungen ist von Null verschieden, was in Abh. Bd. 81, No. 3 bewiesen ist. Die Unbekannten α gehen also eindeutig und endlich aus diesem Gleichungssystem hervor. Hierzu müssen in der Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ die $\mathfrak{b}(\varkappa+\lambda)$ ersten Glieder von dem Gliede mit der Potenz $\frac{1}{(x-A)^{\mathfrak{b}}}$ an gerechnet, demnach höchstens die $\mathfrak{b}(\varkappa+\tau)$ ersten Glieder bekannt sein. Entsprechend ist das Verfahren, wenn die Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ bei $x=t^{-1}$, $t=0$ vorgenommen wird (vgl. Abh. Bd. 81, No. 3).

Der Ausdruck für $p_b^{(k)}$ muss, wofern die reguläre Function F_{m-k} bestehen soll, die Form des gleichstelligen Coefficienten in dem regulären Ausdrucke (5.) No. 1 erhalten, worin $m-k$ statt m, $\varkappa+\lambda$ statt $\varkappa$ gesetzt ist.

Man hat also jetzt das zu einem Ausdrucke $\sum_1^{\varkappa+\lambda}\frac{\alpha_a}{x-a_a}$ *gehörende System von Ausdrücken* $p_b^{(k)}$ $(b=1\dots k)$ *bestimmt. In diesem hat* $p_b^{(k)}$ *die Form des gleichstelligen Coefficienten in dem Ausdrucke des regulären Differentialausdruckes* No. 1. (5.), *worin* $m-k$ *statt* m, $\varkappa+\lambda$ *statt* $\varkappa$ *gesetzt ist.*

Wird nun dieses System in die Gleichungen (5.) *eingesetzt, werden alsdann aus den* k *ersten dieser Gleichungen die Grössen* g, *und wenn* $m-k>k$ *ist, aus den* $(m-k)-k$ *folgenden Gleichungen die Grössen* $p_{k+1}^{(k)}$ *bis* $p_{m-k}^{(k)}$ *successive eindeutig bestimmt, so ist nothwendig und hinreichend, dass sämmtliche Gleichungen* (5.) *durch die ermittelten Grössen* $p^{(k)}$ *und* g *erfüllt werden, damit die Differentialgleichung* (1.) *durch das System* (2.), *wo* F_{m-k} *ein regulärer Differentialausdruck ist, ersetzt werde.*

Dass, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist, der Ausdruck F_{m-k} regulär ist, folgt daraus, dass bei jedem Punkte der charakteristische Index in der Differentialgleichung $F_m=0$ gleich der Summe derer in den Differentialgleichungen $F_{m-k}=0$ und $f_k=0$ ist, und dass $F_m=0$ und $f_k=0$ bei jedem Punkte aus dem Grunde übereinstimmende charakteristische Indices haben, weil in dem Systeme $p_b^{(k)}(b=0\dots k, p_0^{(k)}=1)$ bei jedem Punkte im Endlichen und in dem Systeme $p_b^{(k)\prime}(b=0\dots k, p_0^{(k)\prime}=1)$ bei $t=0$ der charakteristische Index gleich Null und der grösste charakteristische Index in $F_m=0$ gleich $H\leq k$ ist. (Vgl. Abh. Bd. 81, p. 16).

II. *Es ist nun zu zeigen, wie die formelle Entwickelung der Coefficienten* $p_b^{(k)}(b=1\dots m-k)$ *in Potenzreihen bei einem Punkte* a_a $(a=1\dots\varkappa)$ *oder bei dem Punkte* $x=t^{-1}$, $t=0$ *gefunden wird.*

Die Grösse $p_b^{(k)}(t^{-1})$ ist eine ganze rationale Function der Grössen $p_1^{(k)\prime}$ bis $p_b^{(k)\prime}$ und Potenzen von t mit ganzzahligen Exponenten (Gl. (14.)). Es ist demnach, um die Entwickelung von $p_b^{(k)}(t^{-1})$ zu erhalten, die formelle Entwickelung der Coefficienten $p^{(k)\prime}$ in Differentialgleichung $F'_{m-k}(y,t)=0$ (Gl. (14.)) bei $t=0$ aufzusuchen.

Um nun die formelle Entwickelung der Coefficienten $p^{(k)}$ in der Differentialgleichung $F_{m-k}=0$ zu ermitteln, wird die formelle Entwickelung der Integrale von $F_{m-k}=0$ bei a_a $(a=1\dots\varkappa)$ und $x=t^{-1}$, $t=0$ aufgesucht mittels der determinirenden Fundamentalgleichungen von $F_{m-k}=0$ und

mittels der Differentialgleichung $F_m = 0$, der jene Integrale ebenfalls genügen. Aus den Entwickelungen der Integrale werden dann die Entwickelungen der Coefficienten hergeleitet. (Vgl. Abh. Bd. 78, p. 232).

Erstens werde der Fall betrachtet, wo die Entwickelung der Integrale von $F_{m-k} = 0$ bei einem der im Endlichen liegenden singulären Punkte von $F_m = 0$, $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa)$, dem Punkte $x = A$, vorgenommen wird.

Hier wird zuerst die Untersuchung angestellt für den Fall, dass die determinirende Fundamentalgleichung (8.) von $F_m = 0$ bei dem Punkte A nur solche Wurzeln besitzt, von denen je zwei sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Die determinirende Fundamentalgleichung (7.) von $F_{m-k} = 0$ ist durch $m-k$ Wurzeln von (8.), die zur Herstellung von $\alpha_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa)$ (9.) genommen sind, bestimmt. Irgend einer Wurzel r der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung $F_{m-k} = 0$, welche Differentialgleichung nur reguläre Integrale enthält, entspricht alsdann ein Integral dieser Differentialgleichung der Form $c(x-A)^r \sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-A)^\mathfrak{a}$, wo c ein willkürlicher constanter Factor, $c_0 = 1$ ist. Dieses Integral von $F_{m-k} = 0$ ist auch Integral von $F_m = 0$ und die Coefficienten in der Entwickelung desselben sind aus der Differentialgleichung $F_m = 0$ nach Abh. Bd. 74, No. 8 eindeutig und endlich bestimmt.

Es wird weiter die Untersuchung vorgenommen für den Fall, dass die determinirende Fundamentalgleichung (8.) von $F_m = 0$ bei A auch solche Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, enthalte. Einer Wurzel r der determinirenden Fundamentalgleichung von $F_{m-k} = 0$ und daher auch von $F_m = 0$, die sich von den übrigen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von $F_m = 0$ nicht um ganze Zahlen unterscheidet, entspricht wieder eine eindeutig aus $F_m = 0$ zu ermittelende Entwickelung des Integrales. Nun enthalte ferner die determinirende Fundamentalgleichung von $F_m = 0$ eine Gruppe von ν Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden $r_1, r_2, \dots r_\nu$, und diese Wurzeln seien so geordnet, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist.

Wenn nun die determinirende Fundamentalgleichung von $F_{m-k} = 0$ Wurzeln enthält, die zu der genannten Gruppe gehören, so werde erstens der Fall betrachtet, wo dieselben von r_1 an in derselben Reihenfolge, wie in der determinirenden Fundamentalgleichung von $F_m = 0$, vorkommen: $r_1, r_2, \dots r_\mu (\mu \leqq \nu)$. Alsdann ist die formelle Entwickelung der Integrale

von $F_{m-k}=0$ (Vgl. die Abh. des Herrn *Fuchs* dieses Journal Bd. 68 p. 362) aus der Differentialgleichung $F_m=0$ nach Abh. Bd. 74, No. 6 und 8 wiederum eindeutig bestimmt und zwar unter der Form

$$(29.)\quad \begin{cases} v_1, \quad v_1\int v_2\,dx, \;\ldots\; v_1\int dx\,v_2 \ldots \int v_\mu\,dx \\ v_1=(x-A)^{r_1}\varphi_1(x), \quad v_a=(x-A)^{r_a-r_{a-1}-1}\varphi_a(x) \quad (a=2\ldots\mu), \end{cases}$$

wo die Entwickelungen der Grössen φ die Form haben $c\sum_0^\infty c_a(x-A)^a$, c ein willkürlicher constanter Factor, $c_0=1$ ist und die Coefficienten in diesen Entwickelungen eindeutig und endlich bestimmt sind. Nun werde zweitens der Fall untersucht, wo die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von $F_{m-k}=0$, die zu der genannten Gruppe gehören, nicht in derselben Reihenfolge r_1 bis r_ν, wie in der determinirenden Fundamentalgleichung von $F_m=0$, von r_1 an vorkommen; sie seien r_α, r_β, etc. und so geordnet, dass in der vorhergehenden der reelle Theil nicht kleiner, als in der folgenden ist. Die Integrale von $F_{m-k}=0$, die zu dieser Gruppe gehören, müssen unter der Form (29.) darstellbar sein. Es ist nun in der Differentialgleichung $F_m=0$, der diese Integrale, falls sie bestehen, ebenfalls genügen müssen, zuzusehen, ob die formelle Entwickelung der Integrale unter der genannten Form existirt. Zuerst muss also die Entwickelung $(x-A)^{r_\alpha}\varphi_1(x)$ bestehen. Es seien in der Gruppe r_1 bis r_ν vor r_α folgende die von einander verschiedenen Wurzeln: $r_\alpha+k_1+k_2+\cdots+k_s$, $r_\alpha+k_1+\cdots+k_{s-1}$, $\ldots$ $r_\alpha+k_1$, wo k_a $(a=1\ldots s)$ eine positive ganze Zahl, grösser als Null. Dann ergiebt sich aus Abh. Bd. 74, No. 8, dass die Entwickelung $v_1=(x-A)^{r_\alpha}\varphi_1(x)$ entweder nicht möglich ist, oder, wenn sie möglich ist, gleich ist

$$(30.)\quad (x-A)^{r_\alpha}\{b_0\psi_0(x)+b_1(x-A)^{k_1}\psi_1(x)+\cdots+b_s(x-A)^{k_1+\cdots+k_s}\psi_s(x)\},$$

wo die Grössen ψ die Form $1+\sum_1^\infty c_a(x-A)^a$ haben, die Coefficienten b Constanten sind. Diejenigen Constanten b, die zunächst unbestimmt bleiben, sind den Bedingungen gemäss, die die weitere Rechnung einführt, zu bestimmen. Nach Substitution von $v_1\int z\,dx$ in Differentialgleichung $F_m=0$ werden die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung in der Differentialgleichung für z: $r_1-r_\alpha-1, \ldots r_\nu-r_\alpha-1$. Es ist auf dieselbe Weise zuzusehen, ob eine formelle Entwickelung $(x-A)^{r_\beta-r_\alpha-1}\varphi_2(x)$ existirt, welche sie ist und dieses Verfahren zur Entwickelung der Integrale fortzusetzen.

Nun werde zweitens der Fall untersucht, wo die Entwickelung der Integrale von $F_{m-k}(y,t)=0$ bei $t=0$ vorgenommen wird.

Die determinirende Fundamentalgleichung (16.) von $F'_{m-k} = 0$ bei $t = 0$ ist durch $m-k$ Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung (17.) von $F'_m = 0$, die zur Ermittelung der Grösse τ (19.) genommen sind, bestimmt. Die Integrale von $F'_{m-k}(y, t) = 0$ sind auch Integrale von $F'_m(y, t) = 0$. Man kann den Punkt $t = 0$ in $F'_m = 0$ als singulär voraussetzen und kommt dann auf das Vorige zurück. Denn wenn dieser Punkt nicht singulär wäre, so müsste $F_m(y, x) = 0$ im Endlichen einen singulären Punkt besitzen, bei dem man dann die Entwickelungen vornehmen könnte; da eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten immer wenigstens einen singulären Punkt besitzt.

Nachdem die formellen Entwickelungen der Integrale von $F_{m-k} = 0$ ermittelt sind, werden aus diesen Entwickelungen diejenigen der Coefficienten $p^{(k)}$ hergeleitet.

Hierzu kann man für jede Gruppe von μ Integralen unter der Form (29.) eine Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung bilden (Vgl. Abh. Bd. 75, No. 2) und hierauf aus diesen Differentialgleichungen nach No. 2, I eine herleiten, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen der einzelnen ist und die die Integrale aller vereinigt. Oder man verfährt in nachstehender Weise.

Im Allgemeinen ist, um die formellen Entwickelungen der Coefficienten $p^{(k)}$ zu erhalten, folgendes Verfahren anzuwenden.

Man stelle die $m-k$ Integrale von $F_{m-k} = 0$ bei einem der Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa)$, dem Punkte A, unter der Form auf

$$(31.)\quad \begin{cases} v_1, \quad v_1\int v_2\,dx, \quad \dots \quad v_1\int v_2\,dx \dots \int v_{m-k}\,dx \\ v_1 = (x-A)^{r_1}\varphi_1(x), \quad v_\mathfrak{a} = (x-A)^{r_\mathfrak{a}-r_{\mathfrak{a}-1}-1}\varphi_\mathfrak{a}(x) \quad (\mathfrak{a} = 2 \dots m-k), \end{cases}$$

wo die Grössen φ die Form $c\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-A)^\mathfrak{a}$ haben, c ein willkürlicher constanter Factor, $c_0 = 1$ ist, und bilde (Abh. Bd. 75, No. 2) successive die Differentialgleichungen für v_{m-k}, $v_{m-k-1}\int v_{m-k}\,dx$ etc. Entsprechend bei $x = t^{-1}$, $t = 0$.

Dieses Verfahren ist in dem Falle anzuwenden, ***und soll für diesen Fall im Folgenden speciell entwickelt werden***, wenn bei einem der Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa)$ oder bei dem Punkte $x = t^{-1}$, $t = 0$, wenn derselbe in $F_m = 0$ singulär ist, entweder die determinirende Fundamentalgleichung von $F_m = 0$ nur Wurzeln enthält, von denen je zwei sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, oder, falls dieses nicht so ist und diejenigen Wurzeln

derselben, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so in eine Reihe geordnet sind, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist, wenn alsdann die determinirende Fundamentalgleichung von $F_{m-k}=0$ die Wurzeln, die sie aus der betreffenden Reihe etwa enthält, von der ersten in jener Reihe an in derselben Reihenfolge, wie bei $F_m=0$, enthält. Werden nun die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von $F_{m-k}=0$ so in eine Reihe geordnet, dass in dieser Reihe diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen und zwar in der vorhin bezeichneten Ordnung, so entspricht dieser Reihenfolge der Wurzeln eine Darstellung der Integrale von $F_{m-k}=0$ unter der Form (31.), wo die Exponenten r die genannten Wurzeln sind, und man erhält die Grössen v aus $F_m=0$ nach Abh. Bd. 74, No. 6 und 8 formell entwickelt, so dass die Coefficienten in den Entwickelungen eindeutig und endlich sind.

Es sei in Differentialgleichung $F_m=0$ bei dem Punkte A der charakteristische Index $h\geqq 0$. Der Coefficient p_h werde in der Ordnung $\pi_h\geqq 0$ unendlich. Dann ist die niedrigste Potenz in $p_a(a=1\dots h-1)$ $c_a(x-A)^{-\pi_h+h-a+1}$ und in p_a $(a=h+1,\dots m)$ $c_a(x-A)^{-\pi_h+h-a}$, wo die Constanten c_a auch Null sein können. Diese Potenzen werden (auch wenn die Constanten c_a Null sind) als Anfangsglieder in den Entwickelungen der Coefficienten p genommen. Werden nun die l ersten Glieder aus jedem Coefficienten p herausgenommen, so kann man mittels dieser in dem Integrale $v_1=(x-A)^{r_1}\varphi_1(x)$ die l ersten Coefficienten nach Abh. Bd. 74, No. 8, Gl. (2.) berechnen, und wird $y=v_1\int z\,dx$ in $F_m(y,x)=0$ eingesetzt, so sind in der Differentialgleichung für z wiederum die l ersten Glieder in den Entwickelungen der Coefficienten bekannt (Abh. Bd. 75, No. 1, Gl. (4.)). Mittels dieser kann man nun in der Entwickelung von v_2 in derselben Weise die l ersten Coefficienten berechnen, und dieses Verfahren fortsetzen, bis man in der Entwickelung von v_{m-k} die l ersten Coefficienten berechnet hat. Bildet man dann nach Abh. Bd. 75, No. 2 successive die Differentialgleichungen für v_{m-k}, $v_{m-k-1}\int v_{m-k}\,dx$, etc., so werden in den Entwickelungen der Coefficienten dieser Differentialgleichungen jedesmal die l ersten Glieder, demnach schliesslich auch in den Entwickelungen von $p^{(k)}$ die l ersten Glieder eindeutig bekannt. Entsprechend ist es, wenn die Entwickelungen bei $x=t^{-1}$, $t=0$ aus $F'_m(y,t)=0$ vorgenommen werden in Bezug auf die Coefficienten $p^{(k)\prime}$ in $F'_{m-k}(y,t)=0$.

Nach dem bei (21.) und (28.) Gesagten müssen in der Entwickelung

von $p_\mathfrak{b}^{(k)}$ ($\mathfrak{b}=1\dots k$) nach Potenzen von $x-A$ höchstens die $\mathfrak{b}(\varkappa+\tau)$ ersten Glieder bekannt sein. Die Entwickelung von $p_\mathfrak{b}^{(k)}(t^{-1})$ ($\mathfrak{b}=1\dots k$) hat die Form $\sum_0^\infty c_\alpha t^{\mathfrak{b}+\alpha}$, in dieser müssen bei $\mathfrak{b}=1$ höchstens die $\tau+1$ ersten, bei $\mathfrak{b}>1$ höchstens die $\mathfrak{b}(\varkappa+\tau-1)+1$ ersten Glieder bekannt sein, und hierzu genügt es in $p_\mathfrak{c}^{(k)\prime}$ ($\mathfrak{c}=1\dots\mathfrak{b}$), wenn $\varkappa>0$, die $\mathfrak{b}(\varkappa+\tau-1)+1$ ersten Glieder, und wenn $\varkappa=0$, die $\mathfrak{b}(\varkappa+\tau-1)+2$ ersten Glieder (von der Potenz $t^{-\mathfrak{c}}$ an gerechnet) zu ermitteln. Ist $k>m-k$, so ist für $\mathfrak{b}>m-k$ $p_\mathfrak{b}^{(k)}$ identisch Null. Wenn man daher die kleinste der Zahlen k und $m-k$ durch $\bar{k}$ bezeichnet, so genügt es, *die vorhin bezeichnete Zahl l in der Entwickelung bei $x=A$ gleich $\bar{k}(\varkappa+\tau)$, in der Entwickelung bei $x=t^{-1}$, $t=0$ gleich $\bar{k}(\varkappa+\tau-1)+1$, wenn $\varkappa>0$, und gleich $\bar{k}(\varkappa+\tau-1)+2$, wenn $\varkappa=0$, zu setzen.*

Da man nach Abtheilung I. dieser No. die formellen Entwickelungen der Coefficienten $p^{(k)}$ nur bei *einem* Punkte $a_\mathfrak{a}$($\mathfrak{a}=1\dots\varkappa$) oder $x=t^{-1}$, $t=0$ zu kennen braucht, so genügt es, um das vorhin auseinandergesetzte Entwickelungsverfahren anwenden zu können, wenn $F_m=0$ und $F_{m-k}=0$ *einen* solchen singulären Punkt, wie bei (31.) angegeben, besitzen. Ist bei einem solchen Punkte der charakteristische Index in der Differentialgleichung $F_m=0$ gleich H und $H=k$, so dass die determinirenden Fundamentalgleichungen von $F_m=0$ und $F_{m-k}=0$ bei diesem Punkte übereinstimmen, so braucht man nicht erst die Integrale von $F_{m-k}=0$ zu entwickeln, sondern erhält die formellen Entwickelungen der Coefficienten $p^{(k)}$ unmittelbar aus dem Gleichungssystem (5.) nach Abh. Bd. 78, No. 2, Gl. (11.); dieser Fall war derjenige, der in Abh. Bd. 78 und 81 behandelt worden ist.

Weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand folgen in No. 7.

6.

In der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x)=0$$

mit rationalen Coefficienten erfülle der grösste charakteristische Index H die Bedingung $H>0$. Alsdann soll untersucht werden, ob sich die Differentialgleichung unter der Form

$$(2.)\qquad F_{m-k}(y,x)=s,\quad f_k(s,x)=0$$

darstellen lässt, so dass F_{m-k} ein normaler Differentialausdruck ist, dessen determinirender Factor von 1 verschieden, f_k ein Ausdruck der Form (1.) *k^{ter} Ordnung mit Coefficienten, die rational sein müssen.*

Der charakteristische Index in $F_{m-k}=0$ ist bei einem Punkte, in welchem der determinirende Factor unendlich wird, gleich der Ordnung $m-k$, wie in Abtheilung II. dieser No. gezeigt wird. Da nun die Summe der charakteristischen Indices von $F_{m-k}=0$ und $f_k=0$ gleich dem charakteristischen Index von $F_m=0$ ist, so muss $m-k \leqq H$ sein.

I. Der reguläre Ausdruck in dem normalen $F_{m-k}(y,x)$ sei durch $\bar{F}_{m-k}(\bar{y},x)$ bezeichnet, der determinirende Factor durch Ω. Dann ist

$$(3.)\qquad F_m(y,x) = f_k(\Omega\bar{F}_{m-k}(\Omega^{-1}y,x),x).$$

Aus (3.) folgt

$$(4.)\qquad \Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y},x) = \Omega^{-1}f_k(\Omega\bar{F}_{m-k}(\bar{y},x),x),$$

oder die Differentialgleichung $\Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y},x)=0$ hat die Darstellung

$$(5.)\qquad \bar{F}_{m-k}(\bar{y},x)=\bar{s},\quad \Omega^{-1}f(\Omega\bar{s},x)=0,$$

wo $\bar{F}_{m-k}$ ein regulärer Differentialausdruck ist.

Es ist also erstens der Factor Ω so zu bestimmen, dass in Differentialgleichung $\Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y},x)=0$ der grösste charakteristische Index kleiner als m wird. Dann ist zweitens zu untersuchen, ob $\Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y},x)=0$ sich unter der Form (5.) darstellen lässt. Letztere Untersuchung ist in voriger Nummer behandelt. Es bleibt mithin hier die erste übrig.

Es ist also hier zu untersuchen, wie ein Factor Ω aufgefunden wird von der Form

$$(6.)\qquad \Omega = e^W,$$

wo W eine von Null verschiedene rationale Function ist, die in Partialbrüche zerlegt zum absoluten Gliede Null hat, so beschaffen, dass in der Differentialgleichung $\Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y},x)=0$ der grösste charakteristische Index kleiner als die Ordnung m wird.

Die Aufsuchung eines solchen Factors wird unter Zugrundelegung der in Abh. Bd. 76, No. 6 entwickelten Methoden bewerkstelligt.

Wenn die rationale Function W bei dem im Endlichen liegenden Punkte $x=a$ unendlich wird und derjenige Theil der in Partialbrüche zerlegten Function W, welcher die Potenzen von $(x-a)^{-1}$ enthält, gleich w

$$(7.)\qquad w = \sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$$

ist, so ist der charakteristische Index in $e^{-w}F_m(e^wY,x) = \Psi_m(Y,x)$ bei $x=a$ derselbe, wie in $e^{-W+w}\Psi_m(e^{W-w}\bar{y},x) = \Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y},x)=0$, da die Entwickelung von e^{W-w} die Form $\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$ hat.

Es sind demnach diejenigen Grössen w ***der Form*** (7.) ***zu suchen, welche so beschaffen sind, dass in*** $e^{-w}F_m(e^w Y, x) = 0$ ***der charakteristische Index kleiner als die Ordnung*** m ***wird.***

Um den Ausdruck $e^{-w}F_m(e^w Y, x)$ zu bilden, werde $\frac{dw}{dx} = z$ gesetzt. Alsdann hat man, wenn $\frac{d^r e^w T}{dx^r} = e^w T_r$ gesetzt wird,

$$(8.)\quad \begin{cases} T_r = \dfrac{d^r T}{dx^r} + r A_1 \dfrac{d^{r-1} T}{dx^{r-1}} + \dfrac{r(r-1)}{1.2} A_2 \dfrac{d^{r-2} T}{dx^{r-2}} + \cdots + A_r T \\ A_{\mathfrak{a}} = e^{-w} \dfrac{d^{\mathfrak{a}} e^w}{dx^{\mathfrak{a}}} \quad (\mathfrak{a} = 1 \ldots r) \\ A_1 = z, \quad A_2 = z A_1 + \dfrac{dA_1}{dx}, \quad \ldots \quad A_r = z A_{r-1} + \dfrac{dA_{r-1}}{dx}. \end{cases}$$

Die Grösse $A_{\mathfrak{a}}$ fängt mit $z^{\mathfrak{a}}$ an; hierauf folgen Glieder, bei denen die Ordnung, in denen sie für $x = a$ unendlich werden, wenigstens um n niedriger ist. Der Ausdruck $e^{-w}F_m(e^w Y, x)$ wird nun gleich folgendem:

$$(9.)\quad \left\{ \begin{array}{r|r|r|r|l} \dfrac{d^m Y}{dx^m} + m A_1 & \dfrac{d^{m-1} Y}{dx^{m-1}} + \dfrac{m(m-1)}{1.2} A_2 & \dfrac{d^{m-2} Y}{dx^{m-2}} + \cdots + m A_{m-1} & \dfrac{dY}{dx} + A_m & Y \\ + p_1 & + (m-1) A_1 p_1 & + (m-1) A_{m-2} p_1 & + A_{m-1} p_1 & \\ & + p_2 & + (m-2) A_{m-3} p_2 & + A_{m-2} p_2 & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & + p_{m-1} & + A_1 p_{m-1} & \\ & & & + p_m & \end{array} \right.$$

Nun ist in $A_{\mathfrak{a}}$ der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ gleich $\mathfrak{a}(n+1)$. Daher wird in einer Horizontalreihe von (9.)

$$p_{\mathfrak{b}}, \quad (m-\mathfrak{b}) A_1 p_{\mathfrak{b}}, \quad \ldots \quad A_{m-\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{b} = 0 \ldots m-1, \; p_0 = 1),$$

in welcher $p_{\mathfrak{b}}$ für $x = a$ von Null verschieden ist, das folgende Glied in einer Ordnung unendlich, die um $n+1$ höher ist als bei dem vorhergehenden. Wenn man daher die Coefficienten zweier auf einander folgender Differentialquotienten von Y betrachtet und bei jedem von beiden Coefficienten von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Entwickelungen der in (9.) stehenden Summanden vorkommen, die höchste herausnimmt, so ist der Exponent dieser Potenz bei dem Coefficienten des niedrigeren Differentialquotienten wenigstens um $n+1$ höher.

Damit nun in (9.) ***der charakteristische Index kleiner als*** m ***wird, muss in*** $F_m(y, x) = 0$ ***bei dem Punkte*** a ***der charakteristische Index*** h ***grösser als Null sein.***

Ferner ist folgende Bedingung nothwendig (Abh. Bd. 76, p. 294):

Wird in den Ausdruck

$$(10.)\qquad z^h+p_1z^{h-1}+\cdots+p_h$$

$z=\frac{dw}{dx}$, $w=\sum_1^n c_\alpha(x-a)^{-\alpha}$ *eingesetzt, so muss die höchste von allen Potenzen von* $(x-a)^{-1}$, *die in den Entwickelungen der Summanden* z^h, p_1z^{h-1}, $\dots p_h$ *vorkommen, und es müssen die* $n-1$ *niedrigeren Potenzen aus dem Gesammtausdrucke* (10.) *ausfallen.*

Diese Bedingung bestimmt zunächst den Exponenten $n+1$ der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ und den Coefficienten dieser Potenz, und zwar erhält man nach den Betrachtungen Abh. Bd. 76, p. 295 diese Grössen auf folgende Weise.

Die Ordnungszahl, in der p_α $(\alpha=0\dots m, p_0=1)$ für $x=a$ unendlich wird, werde durch π_α bezeichnet, wo $\pi_\alpha=0$ gesetzt wird, wenn p_α für $x=a$ nicht unendlich wird. Es sei nun die grösste der positiven Zahlen

$$(11.)\qquad \pi_1,\quad \frac{\pi_2}{2},\quad \dots\quad \frac{\pi_h}{h},$$

von denen die letzte jedenfalls grösser als Null ist, gleich g und trete zuletzt bei $\frac{\pi_c}{c}$ auf. Ist $c<h$, so sei die grösste positive der Zahlen

$$(12.)\qquad \pi_{c+1}-\pi_c,\quad \frac{\pi_{c+2}-\pi_c}{2},\quad \dots\quad \frac{\pi_h-\pi_c}{h-c},$$

von denen die letzte jedenfalls grösser als Null ist, gleich $g^{(1)}$ und trete zuletzt bei $\frac{\pi_{c^{(1)}}-\pi_c}{c^{(1)}-c}$ auf. Ist $c^{(1)}<h$, so sei die grösste positive der Zahlen

$$(13.)\qquad \pi_{c^{(1)}+1}-\pi_{c^{(1)}},\quad \frac{\pi_{c^{(1)}+2}-\pi_{c^{(1)}}}{2},\quad \dots\quad \frac{\pi_h-\pi_{c^{(1)}}}{h-c^{(1)}},$$

von denen die letzte wiederum grösser als Null ist, $g^{(2)}$ und trete zuletzt bei $\frac{\pi_{c^{(2)}}-\pi_{c^{(1)}}}{c^{(2)}-c^{(1)}}$ auf. In dieser Weise werden Reihen: (11.), (12.), (13.) etc. aufgestellt, bis in einer solchen Reihe die grösste positive Zahl bei der letzten Zahl auftritt. *Dann erfüllen die positiven Zahlen* g, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ *etc. die Bedingung* $g>g^{(1)}>g^{(2)}\dots>0$.

Werden nun von diesen Zahlen diejenigen genommen, die $\geqq 2$ *sind, so bestimmen die ganzzahligen unter letzteren die Werthe des Exponenten* $n+1$, *die der Bedingung entsprechen, dass, wenn in* (10.) $z=\sigma(x-a)^{-(n+1)}$ *eingesetzt wird, die höchste von allen Potenzen von* $(x-a)^{-1}$, *die in den Entwickelungen der Summanden von* (10.) *vorkommen, aus dem Gesammtausdrucke* (10.) *ausfällt.*

Ist g einer der Werthe des Exponenten $n+1$, so ist der Coefficient von $(x-a)^{-g}$ in z Wurzel der Gleichung:

$$(14.)\quad \sigma^c+[p_1(x-a)^g]_{x=a}\sigma^{c-1}+[p_2(x-a)^{2g}]_{x=a}\sigma^{c-2}+\cdots+[p_c(x-a)^{cg}]_{x=a} = 0,$$

deren Wurzeln von Null verschieden sind, und ist $g^{(\nu)}$ einer jener Werthe, so ist der Coefficient von $(x-a)^{-g^{(\nu)}}$ in z Wurzel der Gleichung:

$$(15.)\quad \begin{cases} \sigma^{c^{(\nu)}-c^{(\nu-1)}}+\left[\frac{p_{c^{(\nu-1)}+1}}{p_{c^{(\nu-1)}}}(x-a)^{g^{(\nu)}}\right]_{x=a}\sigma^{c^{(\nu)}-c^{(\nu-1)}-1}+\cdots \\ \qquad \cdots+\left[\frac{p_{c^{(\nu)}}}{p_{c^{(\nu-1)}}}(x-a)^{(c^{(\nu)}-c^{(\nu-1)})g^{(\nu)}}\right]_{x=a} = 0, \end{cases}$$

deren Wurzeln von Null verschieden sind.

Da diese algebraischen Gleichungen durch ihre Wurzeln Coefficienten bestimmen, so mögen die Gleichungen *Coefficientengleichungen* genannt werden. Dem entsprechend empfiehlt es sich, die algebraischen Gleichungen, die als determinirende Fundamentalgleichungen bezeichnet worden sind (s. vorige No. Gl. (7.) und Abh. Bd. 81, No. 2), deren Wurzeln Exponenten bestimmen, *Exponentengleichungen* zu nennen, was im Folgenden geschehen wird.

Es werde eine *einfache* Wurzel der zu einem der Werthe des Exponenten $n+1$ gehörenden Coefficientengleichung als Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ in z genommen.

Wird nun der Ausdruck (10.) durch $f(z)$ bezeichnet, so verschwindet in $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ der Coefficient der höchsten von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden hz^{h-1}, $p_1(h-1)z^{h-2}$ etc. vorkommen, nicht; dieser Coefficient sei K. Durch die bei (10.) angegebene Bedingung werden die Coefficienten in z eindeutig und endlich bestimmt. Denn von den diese Bedingung ausdrückenden n Gleichungen führt jede folgende einen neuen Coefficienten aus z im ersten Grade ein multiplicirt mit der von Null verschiedenen Grösse K. Es ist gleichfalls von Null verschieden der Coefficient der höchsten von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden mA_{m-1}, $(m-1)A_{m-2}p_1$, etc. des Coefficienten von $\frac{dY}{dx}$ vorkommen und der charakteristische Index in (9.) wird $m-1$ (Vgl. Abh. Bd. 76, p. 298.).

Es werde eine *mehrfache* und zwar ϱfache Wurzel der zu einem der Werthe des Exponenten $n+1$ gehörenden Coefficientengleichung als Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$ in z genommen.

In z ist $-nc_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$, demnach in w die Grösse $c_{-n}(x-a)^{-n}$

ermittelt. Nun werde

$$(16.)\quad \begin{cases} e^{-w}F_m(e^w Y, x) \\ = e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}-w^{(1)}}F_m(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}+w^{(1)}}Y, x) = e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}Y, x) \end{cases}$$

gesetzt, wo

$$(17.)\quad e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}}F_m(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}}s, x) = F_m^{(1)}(s, x)$$

ist. Alsdann sind diejenigen Grössen $w^{(1)}$ der Form $\sum_1^{n-1} c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, wo n gegeben ist und die Coefficienten auch Null sein dürfen, zu ermitteln, so dass in $e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}Y, x)$ der charakteristische Index bei $x = a$ kleiner als m wird. Es ist zunächst der Coefficient $c_{-(n-1)}$ zu bestimmen. Dieser Coefficient kann gleich Null gesetzt werden, wenn noch weitere Coefficienten in $w^{(1)}$ zu bestimmen sind, oder wenn in $F_m^{(1)}(s, x)$ der charakteristische Index $< m$ ist. Um die möglichen Werthe von $c_{-(n-1)}$, die von Null verschieden sind, zu ermitteln, ist auf den Ausdruck $e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}Y, x)$ dasselbe Verfahren anzuwenden, welches bei $e^{-w}F_m(e^w Y, x)$ angewandt worden ist ((9.), (10.) etc.). Aus den Reihen der Zahlen, die den Reihen (11.) etc. entsprechen, ergiebt sich, ob in $z^{(1)} = \frac{dw^{(1)}}{dx}$ die gegebene Zahl n ein möglicher Werth der höchsten Exponenten der Potenz $(x-a)^{-1}$ ist, und aus der zugehörigen Coefficientengleichung gehen die möglichen Werthe von $-(n-1)c_{-(n-1)}$ hervor. Bei einer einfachen Wurzel dieser Coefficientengleichung erhält man die übrigen Coefficienten in $z^{(1)}$ eindeutig und endlich, und der charakteristische Index in $e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}Y, x) = e^{-w}F_m(e^w Y, x)$ wird $m-1$. Bei einer mehrfachen Wurzel, so wie wenn $c_{-(n-1)}$ gleich Null gesetzt ist, wird

$$(18.)\quad \begin{cases} e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}Y, x) \\ = e^{-c_{-(n-1)}(x-a)^{-(n-1)}-w^{(2)}}F_m^{(1)}(e^{c_{-(n-1)}(x-a)^{-(n-1)}+w^{(2)}}Y, x) = e^{-w^{(2)}}F_m^{(2)}(e^{w^{(2)}}Y, x) \end{cases}$$

genommen, alsdann der Coefficient $c_{-(n-2)}$ nach demselben Verfahren wie bei $c_{-(n-1)}$ bestimmt, und dies Verfahren fortgesetzt, bis sämmtliche Coefficienten in w ermittelt sind. Ist der letzte Coefficient in z, die Grösse $-c_{-1}$ durch eine Coefficientengleichung bestimmt, so entspricht einer einfachen Wurzel derselben der charakteristische Index $m-1$ in $e^{-w}F_m(e^w Y, x)$; bei einer mehrfachen ist zuzusehen, ob der charakteristische Index $< m$ wird.

Bei einer ϱfachen Wurzel der zu einem Werthe des höchsten Exponenten $n+1$ in z gehörenden Coefficientengleichung verschwindet, wenn

der Ausdruck (10.) durch $f(z)$ bezeichnet wird, in $\frac{\partial^\varrho f(z)}{\partial z^\varrho}$ der Coefficient der höchsten von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden $\frac{\partial^\varrho z^h}{\partial x^\varrho}$, $p_1 \frac{\partial^{\varrho-1} z^{h-1}}{\partial z^{\varrho-1}}$, etc. vorkommen, nicht. Daher ist auch von Null verschieden in dem Coefficienten von $\frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}$ in (9.) der Coefficient der höchsten von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den in (9.) enthaltenen Summanden vorkommen. Hieraus und aus dem bei (9.) Gesagten folgt, dass der charakteristische Index in $e^{-w}F_m(e^w Y, x)$ nicht kleiner als $m-\varrho$ werden kann.

Es sind also bei einem im Endlichen liegenden Punkte $x = a$, bei welchem der charakteristische Index in $F_m(y, x) = 0$ grösser als Null ist, diejenigen Werthe $w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ermittelt, die so beschaffen sind, dass in

$$e^{-w}F_m(e^w Y, x) = 0$$

der charakteristische Index kleiner als m wird; dieselben treten in endlicher Anzahl auf.

Wenn die rationale Function W (Gl. (6.)) *für $x = t^{-1}$, $t = 0$ unendlich wird,* so sei der Theil der in Partialbrüche zerlegten Function W, welcher die Potenzen von x enthält,

$$(19.) \qquad w = \sum_1^n c_\alpha x^\alpha.$$

Setzt man in Differentialgleichung $\Omega^{-1}F_m(\Omega \bar{y}, x) = 0$, $x = t^{-1}$ und bezeichnet den Ausdruck, der erhalten wird, wenn in W $x = t^{-1}$ gesetzt wird, durch W' und setzt $F_m(y, t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y, t)$, so wird

$$(20.) \qquad e^{-W}F_m(e^W \bar{y}, t^{-1}) = (-t^2)^m e^{-W'} F'_m(e^{W'} \bar{y}, t).$$

Es muss nun in der Differentialgleichung $e^{-W'} F'_m(e^{W'} y, t) = 0$ der charakteristische Index für $t = 0$ kleiner als m werden. Der charakteristische Index in dieser Differentialgleichung bei $t = 0$ ist derselbe, wie in

$$e^{-\sum_1^n c_\alpha t^{-\alpha}} F'_m(e^{\sum_1^n c_\alpha t^{-\alpha}} Y, t) = 0.$$

Demnach sind diejenigen Ausdrücke $e^{\sum_1^n c_\alpha t^{-\alpha}}$ zu ermitteln, die so beschaffen sind, dass in

$$e^{-\sum_1^n c_\alpha t^{-\alpha}} F'_m(e^{\sum_1^n c_\alpha t^{-\alpha}} Y, t) = 0$$

bei $t=0$ der charakteristische Index kleiner als m wird. Die Aufsuchung dieser Ausdrücke geschieht nach der vorhin auseinandergesetzten Methode.

Sind nun bei denjenigen Punkten im Endlichen und Unendlichen, in welchen die Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ den charakteristischen Index grösser als Null hat, die Grössen w (Gl. (7.), (19.)) *ermittelt, so werden dieselben in der Weise zu Summen vereinigt, dass in ein und derselben Summe von denjenigen Grössen w, die zu demselben singulären Punkte von $F_m=0$ gehören, höchstens eine enthalten ist und jedenfalls eine, wenn der charakteristische Index von $F_m=0$ bei diesem Punkte gleich m ist. Alle diese Summen stellen alsdann die Werthe von W* (Gl. (6.)) *dar.*

Der charakteristische Index in der Differentialgleichung $e^{-W}F_m(e^W\bar{y},x)=0$ ist bei jedem Punkte gleich dem charakteristischen Index in der Differentialgleichung $e^{-w}F_m(e^w Y,x)=0$, wo w die Summe derjenigen Glieder der in Partialbrüche zerlegten Function W ist, welche in diesem Punkte unendlich werden. Hiernach ist der grösste charakteristische Index in ersterer Differentialgleichung zu bestimmen.

II. Wenn *der Ausdruck $F_m(y,x)$* in (1.) selbst *normal* ist, so wird F_m dargestellt durch $e^W\bar{F}_m(e^{-W}y,x)$ wo $\bar{F}_m(\bar{y},x)$ ein regulärer Ausdruck ist. *In einem Punkte, in welchem W unendlich wird, muss der charakteristische Index in $e^W\bar{F}_m(e^{-W}y,x)=0$ gleich m sein,* wie sich aus Formel (9.) und dem dort Gesagten ergiebt, und für $x=t^{-1}$, $t=0$ aus $e^{W'}\bar{F}'_m(e^{-W'}y,t)=0$ erhellt, wo $\bar{F}_m(\bar{y},t^{-1})=(-t^2)^m\bar{F}'_m(\bar{y},t)$. *In jedem anderen Punkte ist der charakteristische Index in $e^W\bar{F}_m(e^{-W}y,x)=0$ gleich Null.* Es ist ferner $p_1=-m\frac{dW}{dx}+P$, wo P die Summe derjenigen Glieder der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function p_1 ist, welche für Punkte im Endlichen in erster Ordnung unendlich werden.

Damit also der nicht reguläre Differentialausdruck $F_m(y,x)$ in (1.) *normal sei, ist nothwendig, dass der charakteristische Index in $F_m=0$ in jedem Punkte, wo derselbe grösser als Null ist, gleich m ist; ferner dass die aus der Gleichung $p_1-P=-m\frac{dW}{dx}$ und der Bedingung, dass die in Partialbrüche zerlegte rationale Function W zum absoluten Gliede Null hat, bestimmte Function W in denselben Punkten unendlich wird, in denen der charakteristische Index von $F_m=0$ grösser als Null ist. Alsdann ist nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck $e^{-W}F_m(e^W\bar{y},x)$ regulär ist.*

Die Entwickelung des letzteren Ausdruckes erhält man aus Formel (9.).

III. Zu der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ werden bei einem im Endlichen liegenden Punkte a, wo der charakteristische Index $h > 0$ ist, die Zahlen aus der Reihe g, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ etc. (bei (11.), (12.) etc.) genommen, welche diejenigen Werthe des Exponenten $n+1$ ($n \geqq 1$) in $z = \sigma(x-a)^{-(n+1)}$ darstellen, die man durch die Bedingung erhält, dass, wenn in

$$(21.) \qquad z^h + p_1 z^{h-1} + \cdots + p_h$$

$z = \sigma(x-a)^{-(n+1)}$ eingesetzt wird, die höchste von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Entwickelungen der Summanden z^h, $p_1 z^{h-1}$, ... p_h vorkommen, aus dem Gesammtausdrucke (21.) ausfallen soll. Zu jedem solchen Werthe von $n+1$ gehört eine Coefficientengleichung ((14.), (15.) etc.) zur Bestimmung von σ. Mit einem Werthe von $n+1$ und sämmtlichen Wurzeln der zugehörigen Coefficientengleichung werden die Potenzen $\sigma(x-a)^{-(n+1)}$ gebildet. Die Anzahl aller dieser Potenzen bei dem Punkte a ist also gleich der Anzahl der Wurzeln sämmtlicher Coefficientengleichungen. Diese Potenzen sollen zur Abkürzung ***Hauptpotenzen***, die zu der Differentialgleichung $F_m = 0$ bei $x = a$ gehören, genannt werden. Ebenso werden, wenn

$$F_m(y, t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y, t)$$

gesetzt wird, zu der Differentialgleichung $F'_m(y, t) = 0$, wenn bei $t = 0$ der charakteristische Index grösser als Null ist, die Hauptpotenzen gebildet. Bei einem Punkte in $F_m(y, x) = 0$, wo der charakteristische Index gleich Null ist, ist die Anzahl der Hauptpotenzen gleich Null.

Es sei jetzt die Differentialgleichung der Form (1.) mit beliebigen rationalen Coefficienten $F_m(y, x) = 0$ dargestellt unter der Form

$$(22.) \qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x) = 0,$$

wo F_{m-k} ein Ausdruck von der Form von F_m $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, f_k ein solcher Ausdruck k^{ter} Ordnung ist und die Coefficienten in F_{m-k} und f_k rational sind. ***Alsdann soll untersucht werden, in welcher Beziehung bei jedem Punkte die Hauptpotenzen, die zu den Differentialgleichungen*** $F_m = 0$ $F_{m-k} = 0$ ***und*** $f_k = 0$ ***gehören, zu einander stehen.***

Es können bei diesen Differentialgleichungen Hauptpotenzen nur in einem solchen Punkte vorkommen, in dem der charakteristische Index von $F_m = 0$ grösser als Null ist (vgl. das bei No. 3, II über die charakteristischen Indices dieser drei Differentialgleichungen Gesagte).

Nun sei a ein solcher Punkt im Endlichen. Die Coefficienten von F_{m-k} seien $p_k^{(k)}$, die von f_k seien g_s, dann besteht das Gleichungssystem (No. 5, Gl. (5.)):

$$(23.)\quad \begin{cases} p_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=k} \left(1+\frac{d}{dx} p^{(k)}_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\right)_{k-\mathfrak{b}} g_{\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{a}=1\dots m), \\ g_0 = p_0^{(k)} = 1,\ p^{(k)}_{-1} = p^{(k)}_{-2} = \dots = p^{(k)}_{-k+1} = p^{(k)}_{m-k+1} = p^{(k)}_{m-k+2} = \dots = p^{(k)}_{m} = 0. \end{cases}$$

Der charakteristische Index von $F_m = 0$ bei a sei h, von $F_{m-k} = 0$ h', von $f_k = 0$ h''; so dass $h = h'+h''$. Die Ausdrücke (23.) für $p_{\mathfrak{a}}$ werden in (21.) eingesetzt und $z = \sigma(x-a)^{-(n+1)}$ genommen. Man bilde nun das Product

$$(24.)\quad (z^{h'}+p_1^{(k)} z^{h'-1}+\dots+p_{h'}^{(k)})(z^{h''}+g_1 z^{h''-1}+\dots+g_{h''}).$$

In demselben werde $z = \sigma(x-a)^{-(n+1)}$ gesetzt. Man nehme in jedem der beiden Factoren von (24.) denjenigen der Summanden $z^{h'}$, $p_1^{(k)} z^{h'-1}$, etc. $z^{h''}$, $g_1 z^{h''-1}$, etc., in welchem zuerst die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ vorkommt. Der Exponent dieser Potenz sei in dem ersten Factor ε, in dem zweiten η. In dem aus (24.) hervorgehenden Producte

$$(25.)\quad \begin{cases} z^h + q_1 z^{h-1} + \dots + q_h, \\ q_1 = p_1^{(k)} + g_1,\quad q_2 = p_2^{(k)} + p_1^{(k)} g_1 + g_2,\quad \dots\quad q_h = p_{h'}^{(k)} g_{h''} \end{cases}$$

enthält dasjenige der Glieder, z^h, $q_1 z^{h-1}$, ... q_h, in welchem das Product jener beiden Summanden vorkommt, die Potenz $(x-a)^{-(\varepsilon+\eta)}$. Diese Potenz ist die höchste von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die aus den Summanden in (25.), nachdem die Grössen q in ihre Bestandtheile aufgelöst sind, hervorgehen, die also aus den Summanden

$$(26.)\quad z^h,\quad p_1^{(k)} z^{h-1},\quad g_1 z^{h-1},\quad p_2^{(k)} z^{h-2},\quad p_1^{(k)} g_1 z^{h-2},\quad g_2 z^{h-2},\quad \dots\quad p_{h'}^{(k)} g_{h''}$$

erhalten werden. Hat man aber die Ausdrücke (23.) für $p_{\mathfrak{a}}$ in den Ausdruck (21.) eingesetzt und löst man letzteren Ausdruck in die einzelnen aus (23.) hervorgehenden Summanden auf, so enthalten diejenigen der letzteren, welche nicht in (26.) enthalten sind, niedrigere Potenzen von $(x-a)^{-1}$, als solche, welche in den Grössen in (26.) vorkommen. Hierbei ist der Bestandtheil von (21.), der einen Ausdruck der Form $p^{(k)}_{h'+\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{a} = 1\dots m-k-h'$) enthält, mit der Grösse in (26.) zu vergleichen, welche $p^{(k)}_{h'} g_{\mathfrak{b}}$ enthält, der Bestandtheil von (21.), der einen Ausdruck der Form $p_{\mathfrak{b}} g_{h''+\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1\dots k-h''$) enthält, mit der Grösse in (26.), in welcher $p_{\mathfrak{b}} g_{h''}$ vorkommt, und der Bestandtheil von (21.), der einen Ausdruck $\frac{d^{\mathfrak{a}} p_{\mathfrak{b}}^{(k)}}{dx^{\mathfrak{a}}} g_{\mathfrak{c}}$ enthält, mit der Grösse in (26.), in welcher $p_{\mathfrak{b}}^{(k)} g_{\mathfrak{c}}$ vorkommt. Es muss demnach die Potenz $(x-a)^{-(\varepsilon+\eta)}$ von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die aus den Summanden z^h, $p_1 z^{h-1}$, ... p_h hervorgehen, die höchste sein. Der Coefficient dieser Potenz in dem Gesammtausdrucke (21.) wird aber erhalten, wenn man den Coefficienten von $(x-a)^{-\varepsilon}$

in dem Gesammtausdrucke

$$(27.)\qquad z^{h'}+p_1^{(k)}z^{h'-1}+\cdots+p_{h'}^{(k)}$$

mit dem Coefficienten von $(x-a)^{-\eta}$ in dem Gesammtausdrucke

$$(28.)\qquad z^{h''}+g_1 z^{h''-1}+\cdots+g_{h''}$$

multiplicirt. Wird dieses Product gleich Null gesetzt, so sind demnach diejenigen Wurzeln dieser Gleichung, welche von Null verschieden sind, die Wurzeln der Coefficientengleichung, die bei $F_m=0$ zu dem Exponenten $n+1$ gehört. Der Ausdruck (27.) bei Differentialgleichung $F_{m-k}=0$ und der Ausdruck (28.) bei Differentialgleichung $f_k=0$ entspricht dem Ausdrucke (21.) bei Differentialgleichung $F_m=0$. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun, dass die Hauptpotenzen mit dem Exponenten $n+1$ zu den Differentialgleichungen $F_{m-k}=0$ und $f_k=0$ zusammen die zu der Differentialgleichung $F_m=0$ sind. Daraus folgt, *dass überhaupt bei dem Punkte a die Hauptpotenzen, die zu den Differentialgleichungen $F_{m-k}=0$ und $f_k=0$ gehören, zusammen die sind, die zu der Differentialgleichung $F_m=0$ gehören.*

Um die Hauptpotenzen bei der Differentialgleichung $F_{m-k}=0$, wenn F_{m-k} ein normaler Differentialausdruck und bei $x=a$ der determinirende Factor unendlich ist, aufzusuchen, betrachte man den Ausdruck (27.), worin $h'=m-k$ (II. d. No.). Es sei der determinirende Factor e^W und $w=\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ der Theil der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function W, der die Glieder, die für $x=a$ unendlich werden, enthält. Wird dann

$$(29.)\qquad F_{m-k}(y,x) = e^w\,\Psi_{m-k}(e^{-w}y,x)$$

gesetzt, so ist der charakteristische Index in $\Psi_{m-k}(\bar{y},x)=0$, bei $x=a$ gleich Null. Werden nun die Coefficienten $p^{(k)}$ in F_{m-k} aus dem Ausdrucke $e^w\Psi_{m-k}(e^{-w}y,x)$ nach Formel (9.) entwickelt, so ergiebt sich, dass die Zahlen der Reihe (11.) alle gleich $n+1$ werden, und dass die einzige Coefficientengleichung nach Formel (14.) folgende ist:

$$(30.)\qquad \begin{cases} \sigma^{m-k}+(m-k)(nc_{-n})\sigma^{m-k-1}+\dfrac{(m-k)(m-k-1)}{1.2}(nc_{-n})^2\sigma^{m-k-2}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(nc_{-n})^{m-k}=(\sigma+nc_{-n})^{m-k}=0, \end{cases}$$

die die $(m-k)$ fache Wurzel $-nc_{-n}$ enthält. *Die Differentialgleichung $F_{m-k}=0$ hat also $m-k$ einander gleiche Hauptpotenzen, die gleich $-nc_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$ sind, wenn in der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function W des determinirenden Factors e^W die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ die Potenz $c_{-n}(x-a)^{-n}$ ist.*

Man betrachte jetzt in den Differentialgleichungen $F_m = 0$, $F_{m-k} = 0$ und $f_k = 0$ den Punkt $x = t^{-1}$, $t = 0$. Es werde wie in No. 3 und 5

$$(31.)\quad \begin{cases} F_m\;(y, t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y, t) \\ F_{m-k}(y, t^{-1}) = (-t^2)^{m-k} F'_{m-k}(y, t) \\ f_k(s, t^{-1}) = (-t^2)^k f'_k(s, t) \\ t^{-2(m-k)} f_k(t^{2(m-k)} u, t) = f'_k(u, t) \end{cases}$$

gesetzt. Dann ist

$$(32.)\quad F'_m(y, t) = f'_k(F'_{m-k}(y, t), t).$$

In dem Falle, wo $F_{m-k}(y, x)$ ein normaler Ausdruck ist, gehe durch die Substitution $x = t^{-1}$ die Function W in W' über, der reguläre Ausdruck $\bar{F}_{m-k}(\bar{y}, x)$, der in dem normalen enthalten ist, in $(-t^2)^{m-k} \bar{F}'_{m-k}(\bar{y}, t)$, so wird $F'_{m-k}(y, t) = e^{W'} \bar{F}'_{m-k}(e^{-W'} y, t)$. Man kann nun der Formel (32.) zufolge das vorige Verfahren auf die Differentialgleichungen $F'_m = 0$, $F'_{m-k} = 0$ und $f'_k = 0$ anwenden und kommt zu denselben Resultaten. Es sind aber ferner in $f_k = 0$ und $f'_k = 0$ bei $t = 0$ die Hauptpotenzen übereinstimmend. Denn der charakteristische Index in beiden Differentialgleichungen ist derselbe, und ist er gleich $k'' > 0$ und sind die Coefficienten in f'_k gleich g'_ε, so setze man in

$$(33.)\quad s^{k''} + g'_1 s^{k''-1} + \cdots + g'_{k''}$$

$s = \sigma (x - a)^{-(\varkappa+1)}$. Wird derselbe Werth von s in den dem Ausdrucke (33.) entsprechenden, der zur Differentialgleichung $f_k = 0$ gehört, eingesetzt, so ergiebt sich, dass die Bestandtheile des letzteren Ausdruckes, die nicht in (33.) vorkommen, niedrigere Potenzen von $(x-a)^{-1}$ enthalten, als die höchste von allen Potenzen von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden $s^{k''}$, $g'_1 s^{k''-1}$, ... $g'_{k''}$ von (33.) vorkommen. Hieraus folgt, dass die Hauptpotenzen zu beiden Differentialgleichungen bei $t = 0$ übereinstimmen.

Man hat also folgendes Resultat:

Hat die Differentialgleichung der Form (1.) $F_m(y, x) = 0$ *mit beliebigen rationalen Coefficienten die Darstellung* (22.), *so sind bei jedem Punkte im Endlichen und Unendlichen die Hauptpotenzen, die zu den Differentialgleichungen* $F_{m-k}(y, x) = 0$ *und* $f_k(s, x) = 0$ *gehören, zusammen die Hauptpotenzen, die bei demselben Punkte zu der Differentialgleichung* $F_m(y, x) = 0$ *gehören.*

Bei einem Punkte, wo der determinirende Factor in dem Ausdrucke $F_{m-k}(y, x)$, *wenn derselbe normal ist, unendlich wird, gehören zu der Differentialgleichung* $F_{m-k}(y, x) = 0$ $m-k$ *einander gleiche Hauptpotenzen.*

Diese sind bei einem im Endlichen liegenden Punkte a gleich $-n c_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$, wenn in der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function W des determinirenden Factors e^W die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ gleich $c_{-n}(x-a)^{-n}$ ist, und bei $x=t^{-1}$, $t=0$ gleich $-n c_n t^{-(n+1)}$, wenn in der in Partialbrüche zerlegten Function W die höchste Potenz von x gleich $c_n x^n$ ist.

7.

Nachdem in den beiden vorigen Nummern allgemeine Methoden entwickelt worden sind, um zu erkennen, ob die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x)=0$$

mit rationalen Coefficienten sich unter der Form

$$(2.)\qquad F_{m-k}(y,x)=s,\quad f_k(s,x)=0$$

darstellen lässt, wo F_{m-k} ein normaler Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, f_k ein Ausdruck der Form F_m k^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten ist, und um diese Darstellung zu bewerkstelligen, wird jetzt unter Anknüpfung an die Sätze in No. 4 diese Darstellungsweise weiter untersucht.

I. *a.*) Wenn die Differentialgleichung (1.) sich durch das System (2.) ersetzen lässt und in letzterem F_{m-k} ein Ausdruck der Form F_m $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung mit irgend welchen rationalen Coefficienten ist, so sind bei einem Punkte im Endlichen die Wurzeln der Exponentengleichung (determinirenden Fundamentalgleichung, s. No. 6, I) der Differentialgleichung $F_m=0$ nach Abh. Bd. 76, p. 284 (wo die Formel:

$$(a+b)(a+b-1)\dots(a+b-n+1)=a(a-1)\dots(a-n+1)$$
$$+na(a-1)\dots(a-n+2)b+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)\dots(a-n+3)b(b-1)+\dots+b(b-1)\dots(b-n+1)$$

angewandt worden ist) folgende:

Die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k}=0$ unverändert und die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_k=0$, zu welchen ein und dieselbe positive ganze Zahl, die grösste der zu den Coefficienten von $F_{m-k}=0$ gehörenden Zahlen (s. l. c.) addirt ist. Für $x=t^{-1}$ hat man unter Anwendung der Bezeichnungen No. 6 (31.):

$$(3.)\qquad \begin{cases} F'_m(y,t) = f''_k(F'_{m-k}(y,t),t) \\ t^{-2(m-k)}f'_k(t^{2(m-k)}u,t) = f''_k(u,t). \end{cases}$$

Wenn zu den Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m(y,x)=0$ bei einem Punkte im Endlichen die Grösse ϱ addirt wird, so erhält man die

Wurzeln der Exponentengleichung von $x^{\varrho} F_m(x^{-\varrho}\bar{y}, x) = 0$. Wird demnach zu den Wurzeln der Exponentengleichung von $f_k'(s, t) = 0$ die Zahl $-2(m-k)$ addirt, so erhält man die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_k''(u, t) = 0$.

Wenn also die Differentialgleichung (1.) mit beliebigen rationalen Coefficienten sich durch das System (2.), worin F_{m-k} ein Ausdruck der Form F_m $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung mit irgend welchen rationalen Coefficienten ist, ersetzen lässt, so sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m = 0$ bei jedem Punkte im Endlichen oder Unendlichen diese:

Die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m-k} = 0$ unverändert und die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_k = 0$, zu welchen bei einem und demselben Punkte ein und dieselbe ganze Zahl addirt ist.

b.) Der vorstehende Satz wird mit dem in No. 6, III enthaltenen verbunden. Bei einem beliebigen im Endlichen oder Unendlichen liegenden Punkte, wo in $F_m(y, x) = 0$ der charakteristische Index $h \geqq 0$ ist, wird zu dem Grade $m-h$ der Exponentengleichung von $F_m = 0$ addirt die Summe der Grade der sämmtlichen bei diesem Punkte etwa vorhandenen Coefficientengleichungen (No. 6, I), welche Summe $\leqq h$ ist. ***Die hierdurch erhaltene Zahl sei A, und werde bei einem im Endlichen liegenden singulären Punkte a_ε von $F_m = 0$ durch N_ε bezeichnet, bei $x = t^{-1}$, $t = 0$, wenn dieser Punkt in $F_m = 0$ singulär ist, durch N_∞.*** ($F_m = 0$ ***enthält wenigstens einen singulären Punkt.***)

Ist nun $F_m = 0$ unter der Form (2.) dargestellt, so dass F_{m-k} ein Ausdruck der Form von F_m $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung mit beliebigen rationalen Coefficienten ist, so werden bei demselben Punkte zu den Differentialgleichungen $F_{m-k} = 0$ und $f_k = 0$ die entsprechenden Zahlen genommen, dieselben seien bezüglich B und C. Alsdann ist $A = B + C$, und ist F_{m-k} ein normaler Differentialausdruck, so wird $B = m-k$.

Man gehe jetzt auf die Untersuchungen in No. 4 zurück.

Die Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ sei unter der Form

$$(4.) \qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1, \quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad f_{\mathfrak{a}_l}(y_l, x) = s, \quad F_{m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l}(s, x) = 0$$

dargestellt, wo $f_{\mathfrak{a}_k}$ ein normaler Differentialausdruck $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung ist, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l}$ ein Ausdruck der Form des Ausdruckes in (1.) $(m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und entweder $m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l = 0$ ist, oder wenn diese Zahl grösser als Null ist, so enthalte $F_{m-\mathfrak{a}_0-\cdots-\mathfrak{a}_l} = 0$ nicht die Integrale einer Differentialgleichung, in welcher ein normaler Ausdruck gleich Null gesetzt ist.

Der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$, welcher durch das System normaler Ausdrücke

(5.) $f_{a_0}(y, x) = y_1, \quad f_{a_1}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad f_{a_{l-1}}(y_{l-1}, x) = y_l, \quad f_{a_l}(y_l, x)$

gegeben wird, ist nun nach No. 4 identisch mit jedem, der dadurch erhalten wird, dass man $F_m(y, x)$ in irgend einer anderen Weise durch ein System, das wie das System in (4.) beschaffen ist, darstellt und das in demselben enthaltene System normaler Ausdrücke herausnimmt.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun Folgendes:

Die Ordnungszahl N des Differentialausdruckes $\Phi_N(y, x)$ kann nicht grösser sein, als die kleinste der Zahlen N_a, die bei den singulären Punkten in Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ im Endlichen und Unendlichen auftreten.

Und hieraus folgt weiter:

Damit der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ selbst sich durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellen lasse, ist nothwendig, dass alle Zahlen N_a gleich m sind.

II. In den nächstfolgenden Untersuchungen kommen nachstehende beiden Sätze zur Anwendung.

a.) Es seien in der Differentialgleichung

$$(6.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = \Phi_m(y, x) = 0$$

die Coefficienten rational und in der Differentialgleichung

$$(7.) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n y = \Psi_n(y, x) = 0$$

sei $\Psi_n(y, x)$ ein normaler Ausdruck. Die Integrale der beiden Differentialgleichungen seien von einander linearunabhängig und werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m+n}(y, x) = 0$ vereinigt, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist. Dieselbe sei auf die Form

$$(8.) \qquad \Phi_m(y, x) = s, \quad \psi_n(s, x) = 0$$

gebracht, wo ψ_n ein Ausdruck der Form von Φ_m n^{ter} Ordnung ist. Dann ist nach No. 3, I ψ_n ein normaler Ausdruck mit dem determinirenden Factor von Ψ_n. Nun werde der reguläre Ausdruck in Ψ_n durch $\bar{\Psi}_n(\bar{y}, x)$, der in ψ_n durch $\bar{\psi}_n(\bar{s}, x)$ bezeichnet.

Bei jedem Punkte im Endlichen oder Unendlichen unterscheiden sich die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{\Psi}_n(\bar{y}, x) = 0$ von denen der Ex-

ponentengleichung von $\overline{\psi}_n(\overline{s}, x) = 0$ ***nur um ganze Zahlen.*** Diese ganzen Zahlen brauchen bei einem und demselben Punkte nicht einander gleich zu sein.

Der determinirende Factor in Ψ_n sei Ω. Dividirt man alle Integrale in den Differentialgleichungen durch Ω, so erhält man die Differentialgleichungen $\Omega^{-1}\Phi_m(\Omega\overline{y}, x) = \overline{0}$, $\Omega^{-1}\Psi_n(\Omega\overline{y}, x) = \overline{\Psi}_n(\overline{y}, x) = 0$ und $\Omega^{-1}\Phi_m(\Omega\overline{y}, x) = \overline{s}$, $\Omega^{-1}\psi_n(\Omega\overline{s}, x) = \overline{\psi}_n(\overline{s}, x) = 0$.

Werden nun bei dem im Endlichen liegenden Punkte $x = a$ in das letztere System für $\overline{y}$ die n linearunabhängigen regulären Integrale von $\overline{\Psi}_n = 0$ eingesetzt, die zu den Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Psi}_n = 0$ als Exponenten gehören (siehe die Abh. des Herrn ***Fuchs,*** dieses Journal Bd. 66 p. 155, Bd. 68 p. 363), so erhält man n linearunabhängige reguläre Integrale von $\overline{\psi}_n(\overline{s}, x) = 0$, die zu Exponenten gehören, die sich von den vorgenannten Exponenten nur um ganze Zahlen unterscheiden. Jeder Gruppe dieser Integrale, in denen die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, entspricht eine Gruppe von eben so vielen Integralen der Differentialgleichung $\overline{\psi}_n(\overline{s}, x) = 0$, die zu eben so vielen Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\psi}_n = 0$ als Exponenten gehören, so dass die Exponenten der beiden Gruppen sich nur um ganze Zahlen unterscheiden (Abh. Bd. 74: No. 1 Gl. (5.), No. 2, II). Dass die ganzen Zahlen, um welche sich bei $x = a$ die Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Psi}_n(\overline{y}, x) = 0$ von denen der Exponentengleichung von $\overline{\psi}_n(\overline{s}, x) = 0$ unterscheiden, nicht einander gleich zu sein brauchen, ersieht man aus dem Beispiele, wo für $\overline{\Psi}_n(\overline{y}, x) = 0$ eine Differentialgleichung genommen wird, deren Exponentengleichung bei a die Wurzeln $r_1, r_2 \dots r_n$ hat, je zwei der Grössen r sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, eine der Grössen r eine positive ganze Zahl kleiner als m und in $\Omega^{-1}\Phi_m(\Omega\overline{y}, x) = 0$ der Punkt a nicht singulär ist. Wie hierbei $\overline{\Psi}_n(\overline{y}, x)$ zu bilden ist, wenn dieser Differentialausdruck unzerlegbar sein soll, und $\Phi_m(y, x)$, wenn dieser Ausdruck normal und unzerlegbar sein soll, s. No. 8, I. Ebenso gilt der Satz bei dem Punkte $x = t^{-1}$, $t = 0$, wie man sieht, wenn man auf die Differentialgleichung No. 3, I Gl. (6.) das vorhin Gesagte anwendet und das nach Gl. (3.) dieser No. Angegebene berücksichtigt.

b.) Die Differentialgleichung $F_{m+n}(y, x) = 0$ in *a.*) sei auf die Form

$$(9.) \qquad \Psi_n(y, x) = s', \quad \varphi_m(s', x) = 0$$

gebracht, wo φ_m ein Ausdruck der Form von Φ_m m^{ter} Ordnung ist. ***Ist***

nun $\varphi_m(s', x)$ ein normaler Differentialausdruck, so muss auch $\Phi_m(y, x)$ ein solcher sein. Der determinirende Factor stimmt nach No. 3, I in beiden Ausdrücken überein.

Es sei der determinirende Factor in $\varphi_m(s', x)$ gleich ω. Werden die Integrale von (6.) und (7.) durch ω dividirt, so sind die Integrale von

$$\omega^{-1}\Phi_m(\omega\bar{y}, x) = 0 \quad \text{und} \quad \omega^{-1}\Psi_n(\omega\bar{y}, x) = 0$$

vereinigt in der Differentialgleichung $\omega^{-1}F_{m+n}(\omega\bar{y}, x) = 0$, welche die Darstellungen hat

$$(10.) \quad \begin{cases} \omega^{-1}\Phi_m(\omega\bar{y}, x) = \bar{s}, & \omega^{-1}\psi_n(\omega\bar{s}, x) = 0, \\ \omega^{-1}\Psi_n(\omega\bar{y}, x) = \bar{s}', & \omega^{-1}\varphi_m(\omega\bar{s}', x) = 0. \end{cases}$$

Nun ist auch $\omega^{-1}\Psi_n(\omega\bar{y}, x)$ ein normaler Ausdruck, daher nach No. 3, I auch $\omega^{-1}\psi_n(\omega\bar{s}, x)$ mit demselben determinirenden Factor. Wird ein solcher Ausdruck gleich Null gesetzt, so ist in der hieraus entstehenden Differentialgleichung der charakteristische Index bei einem Punkte, wo der determinirende Factor unendlich wird, gleich der Ordnung des Ausdruckes, sonst gleich Null (No. 6, II). Daher haben $\omega^{-1}\Psi_n(\omega\bar{y}, x) = 0$ und $\omega^{-1}\psi_n(\omega\bar{s}, x) = 0$ bei jedem Punkte übereinstimmende charakteristische Indices. Und da bei jedem Punkte der charakteristische Index von $\omega^{-1}F_{m+n}(\omega\bar{y}, x) = 0$ gleich der Summe derer von $\omega^{-1}\Phi_m(\omega\bar{y}, x) = 0$ und $\omega^{-1}\psi_n(\omega\bar{s}, x) = 0$ und ebenso gleich der Summe derer von $\omega^{-1}\Psi_n(\omega\bar{y}, x) = 0$ und $\omega^{-1}\varphi_m(\omega\bar{s}', x) = 0$ ist (vgl. No. 3, II), so müssen auch $\omega^{-1}\Phi_m(\omega\bar{y}, x) = 0$ und $\omega^{-1}\varphi_m(\omega\bar{s}', x) = 0$ bei jedem Punkte übereinstimmende charakteristische Indices haben. Letztere Differentialgleichung hat aber überall den charakteristischen Index Null, demnach auch erstere. Es ist also $\omega^{-1}\Phi_m(\omega\bar{y}, x)$ ein regulärer Ausdruck und $\Phi_m(y, x)$ ein normaler mit dem determinirenden Factor ω.

III. ***Es sollen nun zwei normale Differentialausdrücke einander ähnlich genannt werden, wenn sie unzerlegbar, von derselben Ordnung und demselben determinirenden Factor sind, und wenn die beiden in ihnen enthaltenen regulären Ausdrücke gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, bei denen in jedem Punkte die Wurzeln der Exponentengleichung der einen sich von den Wurzeln derjenigen der anderen nur um ganze Zahlen unterscheiden.*** Hierbei sind nur die singulären Punkte dieser Differentialgleichungen ins Auge zu fassen, da bei einem Punkte, der in beiden Differentialgleichungen nicht singulär ist, die Wurzeln der Exponentengleichungen übereinstimmen.

Es sei der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ gleich einem Systeme normaler Differentialausdrücke, dessen Bestandtheile nach No. 3, II als unzerlegbare vorausgesetzt werden; die Gesammtanzahl dieser Bestandtheile sei $l+1$.

a.) Dadurch, dass auf die Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ das Verfahren angewendet wird, welches bei Herleitung der Sätze in No. 4, I und II gebraucht worden ist, und dabei Satz II, *a.*) der vorliegenden No. berücksichtigt wird, leitet man folgenden Satz her:

Enthält die Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $F_k(y, x) = 0$, in welcher F_k gleich einem Systeme unzerlegbarer normaler Ausdrücke und die Anzahl der Bestandtheile dieses Systemes $c+1$ ist, so giebt es in dem Systeme Φ_N $c+1$ Bestandtheile, die den $c+1$ Bestandtheilen des Systemes F_k so zugeordnet werden können, dass ein Bestandtheil von Φ_N *einem* von F_k entspricht und umgekehrt *und die entsprechenden ähnlich sind.*

b.) Durch Anwendung des Verfahrens von No. 4 und mit Hülfe von Satz II, *b.*) der vorliegenden No. ergiebt sich:

Enthält die Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ ***die Integrale einer Differentialgleichung der Form*** (1.) k^{ter} ***Ordnung*** $F_k(y, x) = 0$ ***mit rationalen Coefficienten, und wird*** F_k ***durch ein System unzerlegbarer Differentialausdrücke dargestellt, so muss jeder Bestandtheil dieses Systemes ein normaler Differentialausdruck sein.***

Unter Anwendung von Satz No. 4, II kommt der Beweis des vorliegenden Satzes auf den Fall zurück, wo F_k selbst ein unzerlegbarer Differentialausdruck ist. Wenn nun der Ausdruck F_k nicht normal wäre, so ergäbe sich mittels des Verfahrens von No. 4, I, wo statt ψ_a hier F_k eintritt, und Satz II, *b.*) dieser No., dass die Integrale von $F_k = 0$ nicht in $\Phi_N = 0$ enthalten sein könnten.

c.) Der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$, der einem Systeme von $l+1$ normalen unzerlegbaren Differentialausdrücken gleich ist, sei nun durch das System

$$(11.) \quad f_{a_0}(y, x) = y_1 \quad f_{a_1}(y_1, x) = y_2 \quad \dots \quad f_{a_{r-1}}(y_{r-1}, x) = y_r \quad f_{a_r}(y_r, x)$$

dargestellt, wo f_{a_k} ein unzerlegbarer Differentialausdruck ist. ***Alsdann muss*** f_{a_k} ***ein normaler Differentialausdruck sein*** (diese No. III, *b.*)).

Es muss $r = l+1$ ***sein*** und es können die Bestandtheile des einen Systemes normaler Ausdrücke den Bestandtheilen des anderen Systemes

so zugeordnet werden, dass einem Bestandtheile des ersteren ***ein*** Bestandtheil des letzteren entspricht und umgekehrt und ***dass die entsprechenden ähnlich sind*** (diese No. III, *a.*)).

d.) Sind von den $l+1$ unzerlegbaren normalen Bestandtheilen eines Systemes, welches $\Phi_N(y,x)$ darstellt, ***je zwei nicht ähnlich,*** so hat der Differentialausdruck $\Phi_N(y,x)$ höchstens $(l+1)l(l-1)\dots 1$ ***verschiedene Darstellungen durch Systeme unzerlegbarer und zwar normaler Differentialausdrücke.***

Das System $\Phi_N(y,x)$ sei durch (11.) gegeben, wo $r=l+1$ ist. Wenn nun in $\Phi_N=0$ die Integrale von $\psi_{\alpha_0}=0$ enthalten sind, wo ψ_{α_0} ein unzerlegbarer Ausdruck $\alpha_0$ter Ordnung ist, so muss ψ_{α_0} normal (III, *b.*)) und einem der Ausdrücke f in (11.) ähnlich sein (III, *a.*)). Die Integrale einer Differentialgleichung $\psi_{\beta_0}=0$, wo ψ_{β_0} ein dem Ausdrucke ψ_{α_0} ähnlicher, aber nicht identischer normaler Ausdruck ist, können nicht in $\Phi_N=0$ enthalten sein. Denn wegen der Unzerlegbarkeit von ψ_{α_0} und ψ_{β_0} sind die Integrale von $\psi_{\alpha_0}=0$ und $\psi_{\beta_0}=0$ von einander linearunabhängig. Werden dieselben in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(\alpha_0+\beta_0)$ter Ordnung $F_{\alpha_0+\beta_0}=0$ vereinigt, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist, so wird $F_{\alpha_0+\beta_0}$ gleich einem Systeme von zwei normalen Ausdrücken, die ψ_{α_0} und ψ_{β_0} ähnlich sind (II, *a.*) und No. 2, III, *b.*)). Dann müsste das System Φ_N zwei ähnliche Bestandtheile besitzen (III, *a.*)).

Es können demnach höchstens $l+1$ unzerlegbare normale Ausdrücke ψ_{α_0} bestehen, so dass die Integrale von $\psi_{\alpha_0}=0$ in $\Phi_N=0$ enthalten sind; je zwei dieser Ausdrücke sind nicht ähnlich, jeder dieser Ausdrücke ist einem Bestandtheile des Systemes Φ_N ähnlich. Jeder dieser Ausdrücke wird nun nach Satz I in No. 4 an die Spitze eines Systemes normaler unzerlegbarer Ausdrücke, welches den Differentialausdruck Φ_N darstellt, gesetzt. Von den übrigen Bestandtheilen dieses Systemes sind alsdann je zwei nicht ähnlich, wie sich nach dem Satze III, *c.*) ergiebt, und man kann auf das System dieser Bestandtheile das vorige Verfahren anwenden und findet so schliesslich den zu beweisenden Satz. ***Sind von den $l+1$ unzerlegbaren normalen Bestandtheilen des Systemes $\Phi_N(y,x)$ zwei oder mehrere einander ähnlich,*** so ***kann*** Φ_N unzählig viele Darstellungen durch Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke haben, wie aus No. 2, III, *c.*) (Schluss) erhellt.

IV. ***Es sollen ferner zwei Systeme normaler Differentialausdrücke***

$$(12.)\quad f_{a_0}(y,x)=y_1 \quad f_{a_1}(y_1,x)=y_2 \quad \dots \quad f_{a_{l-1}}(y_{l-1},x)=y_l \quad f_{a_l}(y_l,x)$$

$$(13.)\quad \varphi_{a_0}(y,x)=y'_1 \quad \varphi_{a_1}(y'_1,x)=y'_2 \quad \dots \quad \varphi_{a_{l-1}}(y'_{l-1},x)=y'_l \quad \varphi_{a_l}(y'_l,x)$$

einander ähnlich heissen, wenn sie gleich viele Bestandtheile enthalten und f_{a_k} *ähnlich* φ_{a_k} $(k = 0 \ldots l)$ *ist.*

a.) Die Differentialgleichung $\Phi_m(y, x) = 0$ der Form (6.) besitze rationale Coefficienten. In der Differentialgleichung $\Psi_n(y, x) = 0$ sei Ψ_n gleich einem Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke. Die Integrale der beiden Differentialgleichungen seien von einander linearunabhängig und werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m+n}(y, x) = 0$ vereinigt, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gesetzt ist. Erhält $F_{m+n}(y, x) = 0$ die Form

$$(14.) \qquad \Phi_m(y, x) = s, \quad \psi_n(s, x) = 0,$$

wo ψ_n ein Ausdruck der Form von Φ_m n^{ter} Ordnung ist, *so ist* ψ_n *durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, welches dem Systeme* Ψ_n *ähnlich ist.* Und wird $F_{m+n}(y, x) = 0$ unter der Form

$$(15.) \qquad \Psi_n(y, x) = s', \quad \varphi_m(s', x) = 0$$

dargestellt, wo φ_m ein Ausdruck der Form von Φ_m m^{ter} Ordnung ist, *so ist ein aus normalen Differentialausdrücken bestehendes System von möglichst hoher Ordnung, welches gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung liefert, deren Integrale in* $\Phi_m = 0$ *enthalten sind, ähnlich einem entsprechenden auf* $\varphi_m = 0$ *sich beziehenden Systeme, und besteht das erstere System nicht, so auch das letztere nicht.*

Um den Satz zu erweisen, der sich auf Formel (14.) bezieht, hat man auf die Differentialgleichung $F_{m+n} = 0$ unter der Form (15.) das Verfahren von No. 4, I anzuwenden, wo statt des dortigen Ausdruckes ψ_a hier Φ_m eintritt, und die Sätze II, *a.*) in der vorliegenden No. und No. 2, III, *b.*) zu berücksichtigen.

Um den Satz, der sich auf Formel (15.) bezieht, zu beweisen, werde zunächst angenommen, dass $\Phi_m = 0$ nicht die Integrale einer Differentialgleichung, in welcher ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt ist, enthalte. Wenn nun $\varphi_m = 0$ die Integrale einer solchen Differentialgleichung $X(s', x) = 0$ enthielte, so müsste die Differentialgleichung $\Psi_n(y, x) = s'$, $X(s', x) = 0$ nach No. 2, III, *a.*) mit $\Phi_m(y, x) = 0$ so viel linearunabhängige Integrale gemeinsam haben, als die Ordnung von X beträgt. Diese Integrale erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten $F = 0$ (No. 2, II). Wird in F der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gesetzt, so muss, da die Integrale von $F = 0$ in $\Psi_n = s'$, $X = 0$ enthalten sind, F nach III, *b.*) dieser No. gleich einem

Systeme normaler Differentialausdrücke sein, entgegengesetzt der Voraussetzung.

Wenn nun $\Phi_m(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung enthält, in welcher ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt ist, so sei ein System dieser Art von möglichst hoher Ordnung gleich $X(y, x)$. Nun sei $\Phi_m(y, x)$ dargestellt durch $X(y, x) = y_1$, $\xi(y_1, x)$. Alsdann werden die Integrale von $X(y, x) = 0$ und $\Psi_n(y, x) = 0$ in einer Differentialgleichung nach Formel (14.) vereinigt $X(y, x) = y_1$, $\zeta_n(y_1, x) = 0$; ferner die Integrale von $\xi(y_1, x) = 0$ und $\zeta_n(y_1, x) = 0$ nach dem bereits bewiesenen Theile des auf Formel (15.) sich beziehenden Satzes in einer Differentialgleichung $\zeta_n(y_1, x) = y_2$, $\eta(y_2, x) = 0$. Nun hat die Differentialgleichung

$$X(y, x) = y_1, \quad \zeta_n(y_1, x) = 0$$

nach dem auf Formel (14.) sich beziehenden Satze auch die Darstellung $\Psi_n(y, x) = s'$, $\chi(s', x) = 0$, wo $\chi(y, x)$ ähnlich dem Systeme $X(y, x)$. Daher wird $F_{m+n}(y, x) = 0$ dargestellt durch $\Psi_n(y, x) = s'$, $\chi(s', x) = s''$, $\eta(s'', x) = 0$.

b.) Wenn die beiden Differentialausdrücke $\Phi_m(y, x)$ und $\Psi_n(y, x)$ durch zwei Systeme unzerlegbarer normaler Ausdrücke gegeben sind, und nicht ein Bestandtheil des einen Systemes einem solchen des anderen ähnlich ist, so sind die Integrale von $\Phi_m(y, x) = 0$ und $\Psi_n(y, x) = 0$ von einander linearunabhängig.

Denn sonst müssten die beiden Differentialgleichungen nach No. 2, II die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung $F_k = 0$ mit rationalen Coefficienten enthalten, und wird in F_k der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gesetzt, so müsste F_k nach III, *b.*) der vorliegenden No. durch ein System normaler Ausdrücke gegeben werden, dessen Bestandtheile nach III, *a.*) bezüglich eben so vielen in dem Systeme Φ_m und in dem Systeme Ψ_n ähnlich wären.

c.) Sind $\varphi_{\alpha_0}(y, x)$, $\varphi_{\alpha_1}(y, x)$, ... $\varphi_{\alpha_r}(y, x)$ Differentialausdrücke, die durch Systeme unzerlegbarer normaler Ausdrücke gegeben sind, und haben je zwei solche Systeme die in dem vorigen Satze vorausgesetzte Beschaffenheit, so sind die Integrale der Differentialgleichungen $\varphi_{\alpha_0} = 0$, $\varphi_{\alpha_1} = 0$, ... $\varphi_{\alpha_r} = 0$ alle von einander linearunabhängig.

Denn zunächst sind die Integrale von $\varphi_{\alpha_0} = 0$ und $\varphi_{\alpha_1} = 0$ von einander linearunabhängig nach dem vorigen Satze. Werden dieselben in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(\alpha_0 + \alpha_1)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{\alpha_0+\alpha_1} = 0$ vereinigt, so erhält diese nach IV, *a.*) dieser No. die Form

$$\varphi_{\alpha_0}(y, x) = s, \quad \psi_{\alpha_1}(s, x) = 0,$$

wo der Differentialausdruck $\psi_{\mathfrak{a}_1}$ durch ein System unzerlegbarer normaler Ausdrücke dargestellt wird, welches dem Systeme $\varphi_{\mathfrak{a}_1}$ ähnlich ist. Daher sind auch die Integrale von $F_{\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1}=0$ und $\varphi_{\mathfrak{a}_2}=0$ nach dem vorigen Satze von einander linearunabhängig, und werden in derselben Weise in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}=0$ vereinigt, aus welcher sich nach IV, *a.*) und *b.*) ergiebt, dass die Integrale von $F_{\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}=0$ und $\varphi_{\mathfrak{a}_3}=0$ linearunabhängig sind. In dieser Weise weiter schliessend erhält man den zu beweisenden Satz.

Dieser Satz enthält den in No. 3, III auf andere Weise bewiesenen als speziellen Fall.

V. Die beiden Differentialgleichungen

$$(16.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y=F_m(y,x)=0,$$

$$(17.)\qquad \frac{d^m \underline{y}}{dx^m}-\frac{d^{m-1}p_1\underline{y}}{dx^{m-1}}+\frac{d^{m-2}p_2\underline{y}}{dx^{m-2}}-\cdots+(-1)^m p_m\underline{y}=\underline{F}_m(\underline{y},x)=0$$

stehen in der reciproken Beziehung zu einander, dass die eine zu Integralen die integrirenden Factoren der anderen hat, und mögen daher *reciproke Differentialgleichungen* heissen, die Differentialausdrücke F_m und $\underline{F}_m$ *reciproke Differentialausdrücke.*

a.) Nach Abh. Bd. 76, No. 1 nehmen die Integrale der beiden Differentialgleichungen die Form an:

$$(18.)\qquad y_1=\mu_1,\ y_2=\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2\,dx,\ \ldots\ y_m=\mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int\mu_{m-1}^{-1}\mu_m\,dx.$$

$$(19.)\qquad \underline{y}_1=\mu_m^{-1},\quad \underline{y}_2=\mu_m^{-1}\int\mu_m\mu_{m-1}^{-1}dx,\ \ldots\ \underline{y}_m=\mu_m^{-1}\int dx\,\mu_m\mu_{m-1}^{-1}\ldots\int\mu_2\mu_1^{-1}dx.$$

Wird die Differentialgleichung der Form (16.) $(m-\mathfrak{a})^{\text{ter}}$ Ordnung, der die Integrale y_1 bis $y_{m-\mathfrak{a}}$ genügen, durch $F_{m-\mathfrak{a}}=0$ bezeichnet, so ist für jede Function y: $\mu_{m-\mathfrak{a}}^{-1}F_{m-\mathfrak{a}}(y,x)=\frac{d}{dx}\mu_{m-\mathfrak{a}}^{-1}F_{m-\mathfrak{a}-1}(y,x)$ $(\mathfrak{a}=0,\ldots m-1)$. Mittels successiver Reduction durch die integrirenden Factoren μ_m^{-1}, μ_{m-1}^{-1} bis μ_{m-k+1}^{-1}, oder mittels $(m-k)$maliger Reduction durch die Substitutionen

$$y=\mu_1\int\mu_1^{-1}z\,dx,\quad z=\mu_2\int\mu_2^{-1}u\,dx,\quad \text{etc.}$$

ergiebt sich (Abh. Bd. 76, No. 1 und 2; Bd. 78, No. 2), dass Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ ersetzt wird durch das System

$$(20.)\qquad F_{m-k}(y,x)=s,\quad f_k(s,x)=0,$$

wo $f_k=0$ eine Differentialgleichung der Form (16.) k^{ter} Ordnung ist, die zu

Integralen

$$\mu_{m-k+1},\quad \mu_{m-k+1}\int \mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}dx, \text{ bis } \mu_{m-k+1}\int dx\,\mu_{m-k+1}^{-1}\mu_{m-k+2}\dots\int \mu_{m-1}^{-1}\mu_m dx$$

hat. Und umgekehrt: Sind letztere Ausdrücke die Integrale von $f_k = 0$ und die Ausdrücke für y_1 bis y_{m-k} in (18.) die Integrale von $F_{m-k} = 0$, so wird das System (20.) durch die Differentialgleichung (16.), die zu Integralen die Ausdrücke (18.) hat, ersetzt.

Ist $\underline{F}_{m-k}(\underline{y}, x)$ der reciproke Differentialausdruck zu $F_{m-k}(y, x)$ und $\underline{f}_k(\underline{s}, x)$ der reciproke zu $f_k(s, x)$, so folgt aus der Form der Integrale (18.) und (19.), dass, wenn die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ durch das System (20.) ersetzt wird, die reciproke $\underline{F}_m(\underline{y}, x) = 0$ durch das System

$$\text{(21.)} \qquad \underline{f}_k(\underline{y}, x) = s', \quad \underline{F}_{m-k}(s', x) = 0$$

dargestellt wird.

Die Coefficienten p seien nun rational. Der charakteristische Index in Differentialgleichung (16.) *stimmt bei jedem Punkte im Endlichen mit dem in Differentialgleichung* (17.) *überein* (Abh. Bd. 75, No. 4).

Ebenso für $x = t^{-1}$, $t = 0$. Denn wird

$$\underline{y}F_m(y, x) = \frac{d}{dx}\underline{y}\,\varphi_{m-1}(y, x)$$

gesetzt und

$$F_m(y, t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y, t), \quad \varphi_{m-1}(y, t^{-1}) = (-t^2)^{m-1}\varphi'_{m-1}(y, t),$$

so erhält man

$$\underline{y}\,t^{2(m-1)}F'_m(y, t) = \frac{d}{dt}\{\underline{y}\,t^{2(m-1)}\varphi'_{m-1}(y, t)\}.$$

Daher ist $\underline{y}\,t^{2(m-1)}$ Integral der zur Differentialgleichung $F'_m(y, t) = 0$ reciproken, die durch $[F'_m](y, t) = 0$ bezeichnet werde. Wird nun

$$\underline{F}_m(\underline{y}, t^{-1}) = (-t^2)^m \underline{F}'_m(\underline{y}, t)$$

gesetzt, so erhält man die Gleichung

$$\underline{F}'_m(\underline{y}, t) = t^{-2(m-1)}[F'_m](\underline{y}\,t^{2(m-1)}, t).$$

Hieraus folgt, dass für $t = 0$ der charakteristische Index in $F'_m(y, t) = 0$ derselbe ist, wie in $\underline{F}'_m(\underline{y}, t) = 0$.

Der reciproke Differentialausdruck zu einem regulären ist demnach selbst regulär.

Nun sei $F_m(y, x)$ *ein normaler Differentialausdruck* mit dem determinirenden Factor Ω und dem regulären Ausdrucke $\bar{F}_m(\bar{y}, x)$. Der reciproke

Ausdruck zu $\bar{F}_m(\bar{y}, x)$ sei durch $\underline{\bar{F}}_m(\underline{\bar{y}}, x)$ bezeichnet. Die m regulären Integrale von $\bar{F}_m(\bar{y}, x) = 0$ kann man bei einem Punkte $x = a$ im Endlichen auf die Form bringen

$$(22.)\quad \bar{y}_1 = \nu_1,\ \ \bar{y}_2 = \nu_1 \int \nu_1^{-1} \nu_2\, dx,\ \ \dots\ \ \bar{y}_m = \nu_1 \int dx\, \nu_1^{-1} \nu_2 \dots \int \nu_{m-1}^{-1} \nu_m\, dx,$$

wo ν_α die Form $(x-a)^r \sum\limits_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ hat. Dann wird in den Integralen (18.) von $F_m(y, x) = 0$ $\mu_\alpha = \Omega \nu_\alpha$ ($\alpha = 1 \dots m$). Hieraus ergiebt sich, dass die Integrale (19.) die Differentialgleichung $\Omega^{-1} \underline{\bar{F}}_m(\Omega \underline{y}, x) = 0$ erfüllen.

Der reciproke Ausdruck zu einem normalen $F_m(y, x)$ ist demnach selbst ein normaler, in welchem der determinirende Factor den reciproken Werth des determinirenden Factors von F_m hat, der reguläre Ausdruck der reciproke des regulären Ausdruckes in F_m ist.

Sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{F}_m(\bar{y}, x) = 0$ bei $x = a$ gleich $r_1, r_2, \dots r_m$, so sind die der Exponentengleichung von $\underline{\bar{F}}_m(\underline{\bar{y}}, x) = 0$ gleich $-r_1 + m - 1,\ -r_2 + m - 1,\ \dots\ -r_m + m - 1$ (Abh. Bd. 76 p. 284, ebenso aus den Formeln (18.) und (19.)). Und wird

$$\bar{F}_m(\bar{y}, t^{-1}) = (-t^2)^m \bar{F}'_m(\bar{y}, t), \quad \underline{\bar{F}}_m(\underline{\bar{y}}, t^{-1}) = (-t^2)^m \underline{\bar{F}}'_m(\underline{\bar{y}}, t)$$

gesetzt und berücksichtigt, dass $t^{2(m-1)} \underline{\bar{F}}'_m(t^{-2(m-1)} \underline{\bar{y}}, t)$ der reciproke Ausdruck von $\bar{F}'_m(\bar{y}, t)$ ist, so ergiebt sich, dass, wenn die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{F}'_m(\bar{y}, t) = 0$ bei $t = 0$ gleich r_1 bis r_m sind, diejenigen der Exponentengleichung von $\underline{\bar{F}}'_m(\underline{\bar{y}}, t) = 0$ gleich $-r_1 - (m-1)$, $-r_2 - (m-1),\ \dots\ -r_m - (m-1)$ sind.

Die Wurzeln der Exponentengleichung einer Differentialgleichung mit nur regulären Integralen bei irgend einem Punkte im Endlichen oder Unendlichen unterscheiden sich demnach von den mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln der Exponentengleichung der reciproken Differentialgleichung bei demselben Punkte nur um ganze Zahlen.

Aus (21.) und dem darauf Folgenden ergiebt sich:

Wird der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ durch das System normaler Ausdrücke

$$(23.)\quad f_{\alpha_0}(y, x) = y_1,\quad f_{\alpha_1}(y_1, x) = y_2,\quad \dots\quad f_{\alpha_l}(y_l, x)$$

dargestellt, und ist der zu $f_{\alpha_k}(y, x)$ reciproke Ausdruck $\underline{f}_{\alpha_k}(\underline{y}, x)$, so wird der

zu $\Phi_N(y, x)$ reciproke $\underline{\Phi}_N(\underline{y}, x)$ durch das System normaler Ausdrücke

$$(24.)\quad \underline{f}_{a_i}(\underline{y}, x) = y'_1, \quad \underline{f}_{a_{i-1}}(y'_1, x) = y'_2, \quad \dots \quad \underline{f}_{a_0}(y'_i, x)$$

dargestellt, welches das zu dem ersteren reciproke System heissen soll.

Ist $F_m(y, x)$ unzerlegbar, so ist auch der reciproke Ausdruck unzerlegbar. Hieraus und dem vorhin Bemerkten folgt:

Die zu zwei ähnlichen normalen Differentialausdrücken reciproken Ausdrücke sind selbst ähnliche normale Differentialausdrücke.

Die zu zwei ähnlichen Systemen normaler Differentialausdrücke reciproken Systeme sind selbst ähnliche Systeme normaler Differentialausdrücke.

b.) Wenn die Integrale mehrerer homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten von einander linearunabhängig sind und in einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen jener ist, vereinigt sind, deren Coefficienten rational sein müssen, so werde von letzterer Differentialgleichung gesagt, *sie zerfalle in jene homogenen linearen Differentialgleichungen.*

Enthält eine homogene lineare Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 $F_{m+n}(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\Psi_n = 0$ der Form (16.) n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, so hat $F_{m+n} = 0$ die Darstellung $\Psi_n(y, x) = s$, $\varphi_m(s, x) = 0$ (Gl. (20.). Vgl. No. 2, II), wo $\varphi_m = 0$ eine Differentialgleichung der Form (16.) m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten ist. Alsdann hat nach (21.) die zu $F_{m+n} = 0$ reciproke Differentialgleichung $\underline{F}_{m+n}(\underline{y}, x) = 0$ die Darstellung $\underline{\varphi}_m(\underline{y}, x) = s'$, $\underline{\Psi}_n(s', x) = 0$, wo $\underline{\varphi}_m$ der reciproke Differentialausdruck zu φ_m, $\underline{\Psi}_n$ der reciproke zu Ψ_n ist. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nun:

Wenn eine Differentialgleichung der Form (16.) $(m+n)^{ter}$ *Ordnung mit rationalen Coefficienten* $F_{m+n}(y, x) = 0$ *die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (16.) m^{ter} *Ordnung mit rationalen Coefficienten* $\Phi_m(y, x) = 0$ *enthält, und in diese Differentialgleichung und eine der Form* (16.) n^{ter} *Ordnung mit rationalen Coefficienten* $\Psi_n(y, x) = 0$ *zerfallen soll, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die zu* $F_{m+n} = 0$ *reciproke Differentialgleichung* $\underline{F}_{m+n}(\underline{y}, x) = 0$ *die Integrale einer Differentialgleichung der Form* (16.) m^{ter} *Ordnung mit rationalen Coefficienten* $\underline{\varphi}_m(\underline{y}, x) = 0$ *enthält, die so beschaffen ist, dass, wenn* $\underline{F}_{m+n} = 0$ *durch* $\underline{\varphi}_m(\underline{y}, x) = s'$, $\underline{\Psi}_n(s', x) = 0$ *dargestellt wird, wo* $\underline{\Psi}_n = 0$ *eine Differentialgleichung der Form* (16.) n^{ter} *Ordnung mit rationalen Coefficienten*

ist, die zu $\Psi_n = 0$ *reciproke Differentialgleichung* $\Psi'_n(y, x) = 0$ *nur solche Integrale enthält, welche von denen in* $\Phi_m(y, x) = 0$ *linearunabhängig sind.*

Wendet man hier den Satz IV, *a.*) und den am Schlusse von V, *a.*) an, so ergiebt sich:

Ist der Differentialausdruck $\Phi_m(y, x)$ *des vorigen Satzes durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegeben, so muss der Differentialausdruck* $\varphi_m(y, x)$ *durch ein dem reciproken System von* Φ_m *ähnliches System dargestellt werden.*

Um die beiden Differentialgleichungen $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ darauf zu prüfen, ob ihre Integrale linearunabhängig sind, hat man ausser dem allgemeinen Verfahren in No. 2, II den Satz No. 7, IV, *b.*). Dazu ist noch hinzuzufügen, dass wenn bei einem Punkte der charakteristische Index in der einen gleich Null, in der anderen gleich der Ordnung ist, die Integrale der beiden Differentialgleichungen von einander linearunabhängig sein müssen, da die erstere bei diesem Punkte nur reguläre Integrale, die andere kein reguläres Integral enthält.

VI, *a.*) Wenn ein normaler Differentialausdruck zerlegbar ist, so wird er nach No. 3, II nur durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt, die alle denselben determinirenden Factor, wie der ursprüngliche Ausdruck, enthalten. Der reguläre Ausdruck in dem ursprünglichen normalen wird alsdann durch das System der in den normalen Bestandtheilen enthaltenen regulären Ausdrücke dargestellt. Als nothwendige Bedingung für die Zerlegbarkeit eines regulären Ausdruckes erhält man nach No. 5 folgende:

Damit die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$, *wo* F_m *ein regulärer Ausdruck* m^{ter} *Ordnung ist, und* $F_m = 0$ $\varkappa$ $(\varkappa \geqq 1)$ *singuläre Punkte im Endlichen* a_1 *bis* $a_\varkappa$ *hat (bei* $\varkappa = 0$ *ist* $F_m(y, x)$ *immer zerlegbar), die Integrale einer Differentialgleichung* $F_{m-k}(y, x) = 0$ *enthalte, wo* F_{m-k} *ein regulärer Ausdruck* $(m-k)^{ter}$ *Ordnung, ist nach* No. 5, I Gl. (9.), (13.), (19.) *nothwendig, dass wenigstens eine der Grössen* τ

$$(25.) \qquad \tau = (\varkappa-1)\frac{(m-k)(m-k-1)}{2} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa} R_\alpha^{(m-k)} - R_\infty^{(m-k)}$$

der Null oder einer positiven ganzen Zahl gleich sei, wo $R_\alpha^{(m-k)}$ $(\alpha = 1 \ldots \varkappa)$ *die Summe von* $m-k$ *Wurzeln der Exponentengleichung (determinirenden Fundamentalgleichung;* s. No. 6, I) *von* $F_m = 0$ *bei* a_α *ist, und wo* $R_\infty^{(m-k)}$ *die Summe von* $m-k$ *Wurzeln der Exponentengleichung von* $F_m = 0$ *bei* $x = t^{-1}$, $t = 0$ *ist.*

Wird die Summe der k übrigen Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m = 0$ bei $a_\mathfrak{a}$ durch $R_\mathfrak{a}^{(k)}$, bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ durch $R_\infty^{(k)}$ bezeichnet, so erhält man aus (25.), da die Summe der Wurzeln aller Exponentengleichungen von $F_m = 0$ bei den $\varkappa$ ($\varkappa \geqq 0$) singulären Punkten im Endlichen und bei dem Punkte $x = t^{-1}$, $t = 0$ gleich $(\varkappa - 1)\frac{m(m-1)}{2}$ (siehe die Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 66 dieses Journal p. 145) ist:

$$(26.)\qquad -\tau = \frac{\varkappa-1}{2}\left\{m(m-1)-(m-k)(m-k-1)\right\} - \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(k)} - R_\infty^{(k)}$$

oder

$$(27.)\qquad -\tau = (\varkappa-1)k(m-k)+(\varkappa-1)\frac{k(k-1)}{2} - \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(k)} - R_\infty^{(k)}.$$

Die Bedingung, dass der Ausdruck (25.) gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl sei, ist daher gleichbedeutend damit, dass (27.) gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

Damit also der reguläre Differentialausdruck m^{ter} Ordnung $F_m(y, x)$ zerlegbar sei, ist nothwendig, dass unter den Werthen der Grössen

$$(28.)\qquad (\varkappa-1)\frac{(m-k)(m-k-1)}{2} - \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(m-k)} - R_\infty^{(m-k)}$$

sich auch eine solche ganze Zahl befindet, die algebraisch $\geqq 0$ oder $\leqq -(\varkappa-1)k(m-k)$ ist, wo $R_\mathfrak{a}^{(m-k)}$ die Summe von $(m-k)$ Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m = 0$ bei dem im Endlichen liegenden singulären Punkte $a_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa$) und wo $R_\infty^{(m-k)}$ die Summe von $(m-k)$ Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m = 0$ bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ ist und k die Bedingung $0 < k < m$ erfüllt.

Die vorhergenannte Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(m-k)} + R_\infty^{(m-k)}$ einen solchen ganzzahligen Werth annehmen soll, der algebraisch

$$\leqq (\varkappa-1)\frac{(m-k)(m-k-1)}{2} \quad \text{oder} \quad \geqq (\varkappa-1)\frac{(m-k)(m-k-1)}{2} + (\varkappa-1)k(m-k)$$

ist. Damit in dieser Bedingung $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(m-k)} + R_\infty^{(m-k)}$ überhaupt irgend welche ganzzahligen Werthe annehmen darf, ist bei $\varkappa > 1$ nothwendig und hinreichend, dass $(\varkappa-1)k(m-k) = 1$. Hierzu muss $\varkappa = 2$, $k = 1$, $m = 2$ sein. Die der Bedingung $\varkappa = 2$, $m = 2$ entsprechende Differentialgleichung ist in den Coefficienten durch die Wurzeln der Exponentengleichungen bei den

singulären Punkten im Endlichen und bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ bestimmt und wird durch Substitution auf diejenige der hypergeometrischen Reihe zurückgeführt. Von jener Differentialgleichung hat Herr *Frobenius* (Bd. 76 dieses Journals p. 256) gezeigt, dass, damit dieselbe das Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung 1ter Ordnung mit rationalem Coefficienten enthält, die Bedingung $\sum_{a=1}^{a=x} R_a^{(1)} + R_\infty^{(1)}$ gleich einer ganzen Zahl nothwendig und zugleich hinreichend ist.

Wenn man nun bei einem regulären Differentialausdrucke zu untersuchen hat, ob derselbe zerlegbar ist, so ist zunächst zuzusehen, ob die Bedingung (28.) für eine Zahl k erfüllt ist. Ist dieses der Fall, so ist weiter das Verfahren von No. 5 auf den Differentialausdruck anzuwenden.

b.) Es seien in dem Systeme normaler Differentialausdrücke

(29.) $f_{a_0}(y, x) = y_1 \quad f_{a_1}(y_1, x) = y_2 \quad \ldots \quad f_{a_{l-1}}(y_{l-1}, x) = y_l \quad f_{a_l}(y_l, x)$

die einzelnen Bestandtheile unzerlegbar und je zwei *nicht ähnlich*. Der determinirende Factor in $f_{a_\mathfrak{b}}$ sei $\Omega_\mathfrak{b}$, der reguläre Ausdruck $\bar{f}_{a_\mathfrak{b}}(\bar{y}_\mathfrak{b}, x)$ $(\mathfrak{b} = 0 \ldots l)$. *Nun sollen die Differentialgleichungen* $\bar{f}_{a_0}(y, x) = 0$ *bis* $\bar{f}_{a_l}(\bar{y}_l, x) = 0$ *so beschaffen sein, dass jede* $f_{a_\mathfrak{b}} = 0$ *einen solchen im Endlichen oder Unendlichen liegenden Punkt* $A_\mathfrak{b}$ *enthält, bei welchem keine Wurzel ihrer Exponentengleichung sich von einer der Wurzeln der Exponentengleichungen der übrigen Differentialgleichungen bei diesem Punkte um eine ganze Zahl unterscheidet.*

Aus (29.) ergiebt sich, wenn der Differentialausdruck, der durch das System (29.) dargestellt wird, mit $\Phi_N(y, x)$ bezeichnet und $y = \Omega_k y'$ gesetzt wird:

(30.) $\Omega_k^{-1} f_{a_0}(\Omega_k y', x) = y_1' \quad \Omega_k^{-1} f_{a_1}(\Omega_k y_1', x) = y_2' \ldots \Omega_k^{-1} f_{a_l}(\Omega_k y_l', x) = \Omega_k^{-1} \Phi_N(\Omega_k y', x)$.

Der Ausdruck $\Omega_k^{-1} f_{a_\mathfrak{b}}(\Omega_k y_\mathfrak{b}', x)$ $(\mathfrak{b} = 0 \ldots l)$ ist selbst normal, der reguläre Ausdruck in demselben $\bar{f}_{a_\mathfrak{b}}(\bar{y}_\mathfrak{b}, x)$. Die Wurzeln der Exponentengleichung von $\Omega_k^{-1} \Phi_N(\Omega_k y', x) = 0$ bei einem Punkte unterscheiden sich von den sämmtlichen Wurzeln der Exponentengleichungen von $\Omega_k^{-1} f_{a_0}(\Omega_k y', x) = 0$ bis $\Omega_k^{-1} f_{a_l}(\Omega_k y', x) = 0$ nur um ganze Zahlen (I d. No.), und die Wurzeln der Exponentengleichung von $\Omega_k^{-1} f_{a_\mathfrak{b}}(\Omega_k y', x) = 0$ $(\mathfrak{b} = 0 \ldots l)$, wenn bei diesem Punkte der charakteristische Index gleich Null ist (Vgl. No. 6, II), sind gleich den Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{f}_{a_\mathfrak{b}}(\bar{y}_\mathfrak{b}, x) = 0$.

Demnach unterscheiden sich die Wurzeln der Exponentengleichung von $f_{a_k}(y_k, x) = 0$ *bei dem Punkte* A_k *von eben so vielen der Exponentengleichung*

von $\Omega_k^{-1}\Phi_N(\Omega_k y', x) = 0$ *nur um ganze Zahlen und von den übrigen dieser Gleichung nicht um ganze Zahlen.*

Dieses werde nun angewandt, wenn die verschiedenen Darstellungen des durch (29.) gegebenen Differentialausdruckes Φ_N durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke aufgesucht werden sollen, die nach III, *c.*) Systeme normaler Ausdrücke sein müssen und deren es höchstens $(l+1)l(l-1)\dots 1$ giebt.

Man hat hierzu zunächst (s. III, *d.*)) die unzerlegbaren normalen Differentialausdrücke aufzusuchen, die gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale in $\Phi_N = 0$ enthalten sind und welche Bestandtheilen des Systemes (29.) ähnlich sein müssen. Um nun zu untersuchen, ob $\Omega_k^{-1}\Phi_N(\Omega_k y', x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $F_{\alpha_k}(y', x) = 0$ enthält, wo F_{α_k} ein regulärer, dem $\bar{f}_{\alpha_k}$ ähnlicher Differentialausdruck sein soll, kann man die formellen Entwickelungen der Integrale von $F_{\alpha_k} = 0$, die nach No. 5 erforderlich sind, bei dem Punkte A_k aus $\Omega_k^{-1}\Phi_N(\Omega_k y', x) = 0$ entnehmen und wird auf keine unbestimmten Constanten innerhalb der Entwickelungen stossen; No. 5 (31.). Enthält $\Omega_k^{-1}\Phi_N(\Omega_k y', x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $F_{\alpha_k} = 0$, wo F_{α_k} ein regulärer Ausdruck α_k^{ter} Ordnung ist und die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{\alpha_k} = 0$ bei A_k sich von denen in der Exponentengleichung von $\bar{f}_{\alpha_k} = 0$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, so muss F_{α_k} unzerlegbar sein, weil sonst nach III, *a.*) unter den Bestandtheilen von Φ_N in dem Systeme (29.) einer sein müsste, der von f_{α_k} verschieden wäre und dessen regulärer Ausdruck gleich Null gesetzt bei A_k eine Exponentengleichung liefern würde, deren Wurzeln sich von den Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{f}_{\alpha_k}(\bar{y}, x) = 0$ nur um ganze Zahlen unterschieden, entgegengesetzt der Voraussetzung. Wird nun $\Phi_N(y, x) = 0$ durch $\Omega_k F_{\alpha_k}(\Omega_k^{-1} y, x) = s$, $\Phi_{N-\alpha_k}(s, x) = 0$ dargestellt, so wird nach III, *c.*) der Ausdruck $\Phi_{N-\alpha_k}$ durch ein System normaler Ausdrücke dargestellt, die den Bestandtheilen des Systemes (29.) von Φ_N, nachdem f_{α_k} herausgenommen ist, so zugeordnet werden können, dass ein Bestandtheil des einen Systemes einem des anderen entspricht und umgekehrt und die entsprechenden ähnlich sind. Bei den Bestandtheilen des Systemes $\Phi_{N-\alpha_k}$ bleibt daher die bei (29.) in Bezug auf die Punkte A_k angegebene Eigenschaft unverändert, und es können auf den Ausdruck $\Phi_{N-\alpha_k}$ mittels der

Bestandtheile f_{a_b} in (29.) dieselben Betrachtungen wie vorhin angewandt werden.

Es ergiebt sich demnach:

Wenn die verschiedenen Darstellungsformen des durch das System (29.) *gegebenen Differentialausdruckes* $\Phi_N(y,x)$ *durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke, welche nach* III, *c.*) *dieser No. normal sein müssen, aufgesucht werden sollen, so giebt es nach* III, *d.*) *deren höchstens* $(l+1)l(l-1)\dots 1$, *und sobald die bei* (29.) *angegebene Bedingung erfüllt ist, können alle formellen Entwickelungen von Integralen, die bei dieser Untersuchung nach No.* 5 *zu bilden sind, bei den Punkten* A_b $(b=0\dots l)$ *vorgenommen werden, und die Coefficienten innerhalb der Entwickelungen werden* (No. 5 (31.)) *eindeutig bestimmt.*

8.

I. *Ein allgemeineres Beispiel einer Differentialgleichung* $F_m(y,x)=0$, *in welcher* F_m *ein System mehrerer normalen Differentialausdrücke ist, die Differentialgleichung* $F_m=0$ *aber nicht in mehrere homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zerfällt* (No. 7, V, *b.*)), *kann man durch folgendes Verfahren geben.*

Wenn eine Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x)=0$$

mit rationalen Coefficienten bei allen singulären Punkten im Endlichen a_1 bis $a_\varkappa$ $(\varkappa \geqq 1)$ und bei $x=t^{-1}$, $t=0$ einen und denselben charakteristischen Index $h>0$ hat und wenn (1.) die Integrale von $F_{m-h}=0$ enthalten soll, wo F_{m-h} ein regulärer Ausdruck $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so ist nach Abh. Bd. 81, No. 3 (Vgl. No. 5, I) dazu nothwendig, dass

$$(2.)\qquad \sum_{a=1}^{a=\varkappa}\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}(x-a_a)\right)_{x=a_a}-\left(\frac{p_{h+1}(t^{-1})}{p_h(t^{-1})}t^{-1}\right)_{t=0} = \tau$$

Null oder eine positive ganze Zahl sei.

Wenn nun $F_m(y,x)=0$ zerfallen soll in $F_{m-h}(y,x)=0$ und eine Differentialgleichung $F_h(y,x)=0$, wo F_h von der Form des Ausdruckes in (1.) h^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, so ist nach No. 7, V, *b.*) nothwendig, dass die reciproke Differentialgleichung zu $F_m=0$, $\underline{F}_m(\underline{y},x)=0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\underline{f}_{m-h}(\underline{y},x)=0$ enthalte, wo $\underline{f}_{m-h}(\underline{y},x)$ ein regulärer Ausdruck $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Da die Differentialgleichungen $F_m=0$ und $\underline{F}_m=0$ im Endlichen dieselben singulären Punkte haben, und

da der charakteristische Index in $F_m = 0$ mit dem in $\underline{F}_m = 0$ bei jedem Punkte im Endlichen oder Unendlichen übereinstimmt (No. 7, V, *a.*)), so hat die Differentialgleichung $\underline{F}_m = 0$ im Endlichen ebenfalls nur die Punkte a_1 bis $a_\varkappa$ zu singulären und bei diesen und dem Punkte $x = t^{-1}$, $t = 0$ den charakteristischen Index $h > 0$. Wenn also diese Differentialgleichung die Integrale einer Differentialgleichung $\underline{f}_{m-h}(\underline{y}, x) = 0$ enthalten soll, wo $\underline{f}_{m-h}$ ein regulärer Ausdruck $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung, so muss die der Bedingung (2.) entsprechende Bedingung erfüllt sein. Die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad \frac{d^m \underline{y}}{dx^m} - \frac{d^{m-1} p_1 \underline{y}}{dx^{m-1}} + \frac{d^{m-2} p_2 \underline{y}}{dx^{m-2}} - \cdots + (-1)^m p_m \underline{y} = \underline{F}_m(\underline{y}, x) = 0$$

sei gleich

$$(4.)\qquad \frac{d^m \underline{y}}{dx^m} + R_1 \frac{d^{m-1} \underline{y}}{dx^{m-1}} + \cdots + R_m \underline{y} = 0$$

gesetzt (den Ausdruck für R_λ s. Abh. Bd. 76, No. 6, Gl. (5.)). Es muss nun

$$(5.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa}\left(\frac{R_{h+1}}{R_h}(x-a_\alpha)\right)_{x=a_\alpha} - \left(\frac{R_{h+1}(t^{-1})}{R_h(t^{-1})}\,t^{-1}\right)_{t=0}$$

Null oder eine positive ganze Zahl sein.

Es werde $p_h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gesetzt, wo $P(x)$ und $Q(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Dann ist (vgl. Abh. Bd. 78, No. 1, Gl. (15.))

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa}\left(\frac{R_{h+1}}{R_h}(x-a_\alpha)\right)_{x=a_\alpha} \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa}\frac{p_{h+1}}{p_h}(x-a_\alpha)_{x=a_\alpha} - (m-h)\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa}\left(\frac{d\log Q(x)}{dx}(x-a_\alpha)\right)_{x=a_\alpha} \\ &\left(\frac{R_{h+1}(t^{-1})}{R_h(t^{-1})}\,t^{-1}\right)_{t=0} \\ &= -\left(\frac{p_{h+1}(t^{-1})}{p_h(t^{-1})}\,t^{-1}\right)_{t=0} - (m-h)\left(\frac{d\log p_h(t^{-1})}{dt}\,t\right)_{t=0}. \end{aligned}\right.$$

Daher wird die Grösse (5.) gleich

$$(7.)\qquad -\tau + (m-h)\left(\frac{d\log P(t^{-1})}{dt}\,t\right)_{t=0}.$$

Da $\left(\frac{d\log P(t^{-1})}{dt}\,t\right)_{t=0}$ Null oder eine negative ganze Zahl ist, so müsste, damit die Grösse (5.) Null oder eine positive ganze Zahl sei, $\tau = 0$ und P gleich einer Constanten sein. P kann aber, weil in Differentialgleichung (1.) für $x = t^{-1}$, $t = 0$ der charakteristische Index h sein soll, keine Constante sein, wie aus den Formeln Abh. Bd. 78, No. 2, Gl. (17.) hervorgeht.

Demnach kann die Differentialgleichung $F_m = 0$ nicht in die beiden $F_{m-h} = 0$ und $F_h = 0$ zerfallen.

Man bilde nun (1.) aus dem Systeme

$$(8.)\qquad F_{m-h}(y, x) = z, \quad f_h(z, x) = 0,$$

wo F_{m-h} ein unzerlegbarer regulärer Ausdruck $(m-h)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, $F_{m-h} = 0$ zu singulären Punkten im Endlichen die Punkte a_1 bis a_x hat (wie ein solcher Ausdruck zu bilden ist, wird weiter unten gezeigt), f_h ein unzerlegbarer normaler Ausdruck ist, $f_h = 0$ im Endlichen dieselben singulären Punkte wie $F_{m-h} = 0$ hat und der determinirende Factor in f_h in diesen Punkten und für $x = t^{-1}$, $t = 0$ unendlich wird. Soll alsdann $F_m(y, x) = 0$ in mehrere homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zerfallen, so muss $F_m = 0$ ausser den Integralen von $F_{m-h} = 0$ noch die von diesen linearunabhängigen Integrale wenigstens einer Differentialgleichung der Form (1.) $\Phi_k(y, x) = 0$ enthalten, wo Φ_k unzerlegbar ist. Dann müsste Φ_k nach No. 7, III, *b.*) und *a.*) ein normaler Ausdruck sein, der einem der beiden F_{m-h} oder f_h ähnlich wäre. Nun kann $F_m = 0$, da F_{m-h} nicht ähnlich f_h ist, nicht die Integrale von zwei Differentialgleichungen $F_{m-h} = 0$ und $\Phi_k = 0$ enthalten, wo Φ_k ein dem Ausdrucke F_{m-h} ähnlicher wäre (No. 7, III, *d.*)). Wenn aber Φ_k dem Ausdrucke f_h ähnlich wäre, so würde Φ_k von h^{ter} Ordnung sein, und die aus dem Systeme (8.) hervorgehende Differentialgleichung $F_m = 0$ zerfiele demnach in $F_{m-h} = 0$ und die Differentialgleichung $\Phi_h = 0$ von h^{ter} Ordnung, und dieses ist, da die aus (8.) hervorgehende Differentialgleichung zu singulären Punkten die Punkte a_1 bis a_x hat und bei diesen und $x = t^{-1}$, $t = 0$ den charakteristischen Index $h > 0$ (No. 6, II), nach dem von Differentialgleichung (1.) Bewiesenen nicht möglich.

Die aus dem Systeme (8.) *hervorgehende Differentialgleichung* (1.) *zerfällt also nicht in mehrere homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.*

Es bleibt noch zu zeigen, wie ein unzerlegbarer regulärer Differentialausdruck zu bilden ist.

Ein regulärer Differentialausdruck $F_m(y, x)$, *wo* $F_m = 0$ *im Endlichen* x ($x > 1$) *singuläre Punkte haben soll, ist nach* No. 7, VI, *a.*) *jedenfalls unzerlegbar, wenn keine der dortigen Summen* $\sum_{a=1}^{a=x} R_a^{(m-k)} + R_x^{(m-k)}$ $(k = 1 \dots m-1)$ *ganzzahlig ist.*

Wenn man nun zu Wurzeln der Exponentengleichung bei den x

singulären Punkten im Endlichen und zu Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ Grössen wählt, deren Summe gleich $(\varkappa - 1)\frac{m(m-1)}{2}$ wird, so giebt es, wenn $\varkappa > 1$ ist, reguläre Ausdrücke m^{ter} Ordnung F_m, so dass $F_m = 0$ keine anderen singulären Punkte im Endlichen hat, und die Exponentengleichungen bei diesen Punkten und bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ die vorgeschriebenen Wurzeln haben. Denn werden die Coefficienten in F_m durch $p_\mathfrak{a}$ bezeichnet, so ist p_1 vollständig bestimmt (s. No. 1, Gl. (5.) und No. 5, Gl. (6.) und (7.)) und in $p_\mathfrak{a} = \frac{\psi_\mathfrak{a}(x)}{((x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varkappa))^\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = 2\dots m)$, wo $\psi_\mathfrak{a}(x)$ eine ganze rationale Function, deren Grad $\leqq \mathfrak{a}(\varkappa - 1)$, sind von $\psi_\mathfrak{a}(x)$ $\varkappa$ Werthe für die Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1\dots\varkappa)$ und der Werth $(\psi_\mathfrak{a}(t^{-1})\, t^{\mathfrak{a}(\varkappa-1)})_{t=0}$ bekannt.

Nimmt man also bei $\varkappa > 1$ zu Wurzeln der Exponentengleichungen von $F_m = 0$ bei den singulären Punkten a_1 bis $a_\varkappa$ im Endlichen und bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ solche Grössen, deren Summe gleich $(\varkappa - 1)\frac{m(m-1)}{2}$ ist und die so beschaffen sind, dass keine der Summen $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(m-k)} + R_x^{(m-k)}$ $(k = 1\dots m-1)$ ganzzahlig wird, und dass bei keinem Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1\dots\varkappa)$ die Wurzeln mit den positiven Zahlen $0, 1, \dots m-1$ übereinstimmen, so kann man reguläre Ausdrücke $F_m(y, x)$ m^{ter} Ordnung bilden, so dass $F_m = 0$ nur die Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1\dots\varkappa)$ im Endlichen und diese jedenfalls zu singulären hat, und dass bei diesen Punkten und bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ die Exponentengleichungen zu $F_m = 0$ die vorgeschriebenen Grössen zu Wurzeln besitzen. ***Diese regulären Ausdrücke sind alsdann unzerlegbar.***

Zu dem vorliegenden Zwecke genügt es, die Wurzeln in folgender Weise zu wählen. Die Wurzeln der Exponentengleichungen bei den singulären Punkten a_1 bis $a_\varkappa$ werden reell und positiv genommen, so dass bei keinem dieser Punkte die Wurzeln mit den positiven ganzen Zahlen $0, 1, \dots m-1$ zusammenfallen und dass die Summe sämmtlicher Wurzeln gleich $(\varkappa - 1)\frac{m(m-1)}{2} + 1$ ist. Werden dann alle Summen $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(m-k)}$ $(k = 1\dots m-1)$ gebildet und bei jeder der Ueberschuss $(\geqq 0$ und $< 1)$ dieser Summe über die nächst niedrige ganze Zahl, so sei der kleinste derjenigen Ueberschüsse, die grösser als Null sind, α, der grösste β. Die Wurzeln seien so gewählt, dass $\beta > \alpha > 0$ ist, wozu nur bei zwei der Summen $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(m-k)}$ $(k = 1\dots m-1)$ diese Ueberschüsse grösser als Null und von einander verschieden zu sein

brauchen. Dann werden die Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ reell, von Null verschieden und negativ genommen, so dass ihre Summe gleich -1 wird und dass eine der Wurzeln absolut genommen grösser als β, die Summe der übrigen absolut genommen kleiner als α ist. Alsdann erfüllen die Wurzeln die vorgeschriebenen Bedingungen.

II. ***Als Beispiel einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, die in mehrere Differentialgleichungen zerfällt, in welchen normale Differentialausdrücke gleich Null gesetzt sind, kann die homogene lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten aufgeführt werden.***

Es seien in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ der Form (1.) die Coefficienten p constant, p_m von Null verschieden. Diese Differentialgleichung hat nur den Punkt $x = t^{-1}$, $t = 0$ zum singulären Punkte. Der charakteristische Index bei diesem Punkte ist derselbe, wie in dem Systeme $\frac{p_\alpha(t^{-1})}{t^{2\alpha}}$ $(\alpha = 0 \ldots m,\ p_0 = 1)$, daher gleich m. Man hat nun bei dem Punkte t^{-1}, $t = 0$ oder in $F'_m(y, t) = 0$ bei $t = 0$ die Hauptpotenzen (No. 6, I und III) aufzusuchen. Der Coefficient von $\frac{d^{m-\alpha}y}{dt^{m-\alpha}}$ in $F'_m = 0$ p'_α ist (Abh. Bd. 78, No. I, Gl. (15.))

$$(9.)\quad \begin{cases} p'_\alpha = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}\,\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\alpha)}{t^\alpha} \\ -\dfrac{(m-1)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha-1}\,\dfrac{(m-2)\ldots(m-\alpha)}{t^{\alpha+1}}\,p_1 + \cdots + (-1)^\alpha \dfrac{p_\alpha}{t^{2\alpha}}. \end{cases}$$

Werden nun aus p'_α $(\alpha = 1 \ldots m)$ nach No. 6, (11.) die Zahlen

$$(10.)\quad \pi_1,\ \frac{\pi_2}{2},\ \ldots\ \frac{\pi_m}{m}$$

bestimmt, so ergiebt sich, dass die grösste derselben 2 ist und zuletzt bei $\frac{\pi_m}{m}$ auftritt. Daher werden die Hauptpotenzen σt^{-2} und die Coefficientengleichung zur Bestimmung von σ (No. 6, Gl. (14.))

$$(11.)\quad \sigma^m - p_1\sigma^{m-1} + p_2\sigma^{m-2} - \cdots + (-1)^m p_m = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien $-\sigma_1$ bis $-\sigma_m$. Dann sind nach No. 6, I

$$(12.)\quad e^{\sigma_1 x},\ e^{\sigma_2 x},\ \ldots\ e^{\sigma_m x}$$

die möglichen Werthe der determinirenden Factoren derjenigen normalen Ausdrücke, die gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen. Man bilde nun, um die zu den determinirenden Factoren gehörenden regulären Ausdrücke zu finden, $e^{-\sigma_\alpha x} F_m(e^{\sigma_\alpha x} Y, x) = 0$

oder

$$(13.)\quad \left\{\begin{array}{l|l|ll|l} \frac{d^m Y}{dx^m}+m\sigma_a & \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}+m(m-1)\sigma_a^2 & \frac{d^{m-2}Y}{dx^{m-2}}+\cdots & +\sigma_a^m & Y = 0. \\ \quad +p_1 & \quad +p_1 m\sigma_a & & +p_1\sigma_a^{m-1} & \\ & \quad +p_2 & & +p_2\sigma_a^{m-2} & \\ & & & \vdots & \\ & & & +p_m & \end{array}\right.$$

Ist $-\sigma_a$ eine einfache Wurzel von (11.), so wird der grösste charakteristische Index in (13.), der charakteristische Index bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ gleich $m-1$, der Coefficient von Y in (13.) verschwindet, während der von $\frac{dY}{dx}$ von Null verschieden ist, und die Differentialgleichung (13.) enthält das Integral von $\frac{dY}{dx} = 0$. Ist $-\sigma_a$ eine ϱfache Wurzel von (11.), so wird der charakteristische Index in (13.) bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ gleich $m-\varrho$, der Coefficient von $\frac{d^{m-\varrho}Y}{dx^{m-\varrho}}$ in (13.) verschwindet nicht, während die Coefficienten der Ableitungen niedrigerer Ordnungen verschwinden, die Differentialgleichung (13.) enthält die Integrale von $\frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho} = 0$.

Die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ enthält demnach das Integral von $e^{\sigma_a x}\frac{de^{-\sigma_a x}y}{dx} = 0$, wenn $-\sigma_a$ eine einfache Wurzel von (11.) ist und die Integrale von $e^{\sigma_a x}\frac{d^\varrho e^{-\sigma_a x}y}{dx^\varrho} = 0$, wenn $-\sigma_a$ eine ϱfache Wurzel von (11.) ist. Die sämmtlichen Ausdrücke $e^{\sigma_a x}\frac{de^{-\sigma_a x}y}{dx}$ und $e^{\sigma_a x}\frac{d^\varrho e^{-\sigma_a x}y}{dx^\varrho}$, welche den von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung (11.) entsprechen, sind normale mit von einander verschiedenen determinirenden Factoren, daher sind die Integrale der Differentialgleichungen, in welchen diese normalen Ausdrücke gleich Null gesetzt sind, von einander linearunabhängig (No. 3, III oder No. 7, IV, *c.*)). Die Differentialgleichung $F_m = 0$ zerfällt demnach in diese Differentialgleichungen.

9.

Es sollen jetzt die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ untersucht werden, in der Φ_N durch ein System normaler Differentialausdrücke gegeben ist.

I. Der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ sei durch das System

(1.) $\quad f_{\epsilon_1}(y, x) = y_1 \;\; f_{\epsilon_2}(y_1, x) = y_2 \dots f_{\epsilon_{\iota-1}}(y_{\iota-1}, x) = y_\iota \;\; f_{\epsilon_\iota}(y_\iota, x)$

dargestellt, wo f_{a_k} $(k = 0 \dots l)$ ein normaler Differentialausdruck $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem determinirenden Factor Ω_k und dem regulären Ausdrucke $\bar{f}_{a_k}(\bar{y}_k, x)$, $N = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_l$ ist.

Geht nun die homogene lineare Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m+n}(y, x) = 0$ aus dem Systeme

$$(2.) \qquad F_m(y, x) = s, \quad f_n(s, x) = 0$$

hervor, wo F_m ein homogener linearer Differentialquotientenausdruck m^{ter}, f_n ein solcher n^{ter} Ordnung ist und die Coefficienten der höchsten Ableitungen gleich 1 sind, und sind die m linearunabhängigen Integrale von $F_m = 0$

$$(3.) \qquad y_\mathfrak{b} = \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \dots \int \mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_\mathfrak{b}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots m),$$

die n Integrale von $f_n = 0$

$$(4.) \qquad s_\mathfrak{b} = \mu_{m+1} \int dx\, \mu_{m+1}^{-1} \mu_{m+2} \dots \int \mu_{m+\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_{m+\mathfrak{b}}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots s),$$

so sind die $m+n$ Integrale von $F_{m+n} = 0$ (No. 7, V, a.))

$$(5.) \qquad y_\mathfrak{b} = \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \dots \int \mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_\mathfrak{b}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots m+n).$$

Nun seien die $\mathfrak{a}_k$ *Integrale von* $f_{a_k}(y_k, x) = 0$

$$(6.) \qquad y_{k,\mathfrak{b}} = \mu_{k,1} \int dx\, \mu_{k,1}^{-1} \mu_{k,2} \dots \int \mu_{k,\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_{k,\mathfrak{b}}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k).$$

Es ergiebt sich dann aus dem Vorhergehenden, dass die Integrale der Differentialgleichung

$$(7.) \qquad f_{a_{l-1}}(y_{l-1}, x) = y_l, \quad f_{a_l}(y_l, x) = 0$$

folgende sind:

$$(8.) \qquad y_{l-1,\mathfrak{b}} = \mu_{l-1,1} \int dx\, \mu_{l-1,1}^{-1} \mu_{l-1,2} \dots \int \mu_{l-1,\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_{l-1,\mathfrak{b}}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_{l-1} + \mathfrak{a}_l),$$

wo in den Grössen μ der Zeiger $l-1, \mathfrak{a}_{l-1} + \mathfrak{c} = l, \mathfrak{c}$ $(\mathfrak{c} = 1 \dots \mathfrak{a}_l)$ zu setzen ist.

Und dadurch dass dieses Verfahren fortgesetzt wird, findet sich, dass die Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ *diese sind:*

$$(9.) \qquad y_{0,\mathfrak{b}} = \mu_{0,1} \int dx\, \mu_{0,1}^{-1} \mu_{0,2} \dots \int \mu_{0,\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_{0,\mathfrak{b}}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots N),$$

wo in den Grössen μ *die Zeiger*

$$(10.) \qquad \begin{cases} 0, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{c} = 1, \mathfrak{c} \quad (\mathfrak{c} = 1 \dots \mathfrak{a}_1) \\ 0, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{c} = 2, \mathfrak{c} \quad (\mathfrak{c} = 1 \dots \mathfrak{a}_2) \\ \vdots \\ 0, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_{l-1} + \mathfrak{c} = l, \mathfrak{c} \quad (\mathfrak{c} = 1 \dots \mathfrak{a}_l) \end{cases}$$

zu setzen, alsdann die Werthe von μ *aus* (6.) *zu entnehmen sind.*

Sind die Coefficienten in dem Systeme (2.) rational, so ergiebt sich aus (2.) für $x = t^{-1}$, wenn

$$F_{m+n}(y, t^{-1}) = (-t^2)^{m+n} F'_{m+n}(y, t), \quad F_m(y, t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y, t),$$

$f_n(y, t^{-1}) = (-t^2)^n f'_n(y, t)$ und $t^{-2m} f'_n(t^{2m} u, t) = f''_n(u, t)$ gesetzt wird,

$$(11.) \qquad F'_m(y, t) = u, \quad f''_n(u, t) = F'_{m+n}(y, t).$$

Wird nun

$$f_{\mathfrak{a}_k}(y_k, t^{-1}) = (-t^2)^{\mathfrak{a}_k} f'_{\mathfrak{a}_k}(y_k, t), \quad t^{-2(\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_{k-1})} f'_{\mathfrak{a}_k}(t^{2(\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_{k-1})} u_k, t) = f''_{\mathfrak{a}_k}(u_k, t)$$

und $\Phi_N(y, t^{-1}) = (-t^2)^N \Phi'_N(y, t)$ gesetzt, so ergiebt sich aus (1.) und (11.)

$$(12.) \qquad f'_{\mathfrak{a}_0}(y, t) = u_1, \quad f''_{\mathfrak{a}_1}(u_1, t) = u_2, \quad \dots \quad f''_{\mathfrak{a}_l}(u_l, t) = \Phi'_N(y, t).$$

Geht der determinirende Factor Ω_k in $f_{\mathfrak{a}_k}$ durch Substitution von $x = t^{-1}$ in Ω'_k, der reguläre Ausdruck $\bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, x)$ in $\bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, t^{-1}) = (-t^2)^{\mathfrak{a}_k} \bar{f}'_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, t)$ über, so wird $f'_{\mathfrak{a}_k}(y_k, t) = \Omega'_k \bar{f}'_{\mathfrak{a}_k}(\Omega'^{-1}_k y_k, t)$, und wenn

$$\bar{f}''_{\mathfrak{a}_k}(u_k, t) = t^{-2(\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_{k-1})} \bar{f}'_{\mathfrak{a}_k}(t^{2(\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_{k-1})} u_k, t)$$

gesetzt wird, so ist $f''_{\mathfrak{a}_k}(u_k, t) = \Omega'_k \bar{f}''_{\mathfrak{a}_k}(\Omega'^{-1}_k u_k, t)$.

Die beiden Differentialgleichungen $\bar{f}'_{\mathfrak{a}_k}(y_k, t) = 0$ und $\bar{f}''_{\mathfrak{a}_k}(u_k, t) = 0$ haben bei $t = 0$ und überhaupt bei jedem Punkte (Abh. Bd. 78 p. 243) den charakteristischen Index gleich Null. Daher sind $f'_{\mathfrak{a}_k}(y_k, t)$ und $f''_{\mathfrak{a}_k}(u_k, t)$ normale Ausdrücke mit dem determinirenden Factor Ω'_k. Die Integrale von $\Phi'_N(y, t) = 0$ bei $t = 0$ werden nun aus dem Systeme (12.) ebenfalls unter der Form (9.) dargestellt.

Es werden jetzt die Entwickelungen der Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ bei einem im Endlichen liegenden singulären Punkte $x = a$ untersucht.

Um die Integrale von $f_{\mathfrak{a}_k}(y_k, x) = \Omega_k \bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\Omega_k^{-1} y_k, x) = 0$ bei $x = a$ nach Formel (6.) aufzustellen, ***seien in der Exponentengleichung von $\bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, x) = 0$ bei $x = a$ die Wurzeln:***

$$(13.) \qquad r_{k,\mathfrak{b}} \; (\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k).$$

Die $\mathfrak{a}_k$ regulären Integrale letzterer Differentialgleichung können dann auf die Form gebracht werden

$$(14.) \qquad \bar{y}_{k,\mathfrak{b}} = \nu_{k,1} \int dx \, \nu_{k,1}^{-1} \nu_{k,2} \dots \int \nu_{k,\mathfrak{b}-1}^{-1} \nu_{k,\mathfrak{b}} \, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k),$$

wo $\nu_{k,\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_{k,\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1} \varphi_{k,\mathfrak{b}}(x)$ $(\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k)$ ***ist,*** die Function $\varphi_{k,\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k)$ die Form $c \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ hat, c eine von Null verschiedene willkürliche Constante

und $c_0 = 1$ ist, die Coefficienten c_α aus der Differentialgleichung eindeutig und endlich bestimmt sind und die Potenzreihe für die Function $\varphi_{k,\mathfrak{b}}$ in einem Kreise mit dem Mittelpunkte $x = a$ convergirt nach einem Satze von Herrn *Fuchs* Bd. 66 dieses Journals p. 148, Bd. 68 p. 362.

In den Integralen $y_{k,\mathfrak{b}}$ Formel (6.) wird dann

$$(15.) \qquad \mu_{k,\mathfrak{b}} = \Omega_{k,\mathfrak{b}} \nu_{k,\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k),$$

wo $\Omega_{k,\mathfrak{b}} = \Omega_k$ $(\mathfrak{b} = 1 \dots \mathfrak{a}_k)$ *gesetzt ist.*

In den Integralen (9.) $y_{0,\mathfrak{b}}$ *von* $\Phi_N(y, x) = 0$ *wird*

$$(16.) \qquad \mu_{0,\mathfrak{b}} = \Omega_{0,\mathfrak{b}} (x-a)^{r_{0,\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}-1} \varphi_{0,\mathfrak{b}}(x) \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots N),$$

wo in Betreff der Zeiger $0, \mathfrak{a}_0+1$, $0, \mathfrak{a}_0+2$ *bis* $0, N$ *in* $\Omega_{0,\mathfrak{b}}$, $r_{0,\mathfrak{b}}$, $\varphi_{0,\mathfrak{b}}$ *die Bestimmungen* (10.) *gelten.*

Die einwerthige Grösse $\Omega_k = e^{W_k}$, wo W_k eine rationale Function ist, wird bei $x = a$ dargestellt durch die Summe von zwei Potenzreihen $\sum\limits_1^\infty c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} + \sum\limits_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, wo die erste Reihe verschwindet, wenn W in a nicht unendlich wird, sonst unendlich viele Glieder enthält, da alsdann $\frac{d \log \Omega_k}{dx}$ in höherer, als erster Ordnung unendlich wird. Werden die Entwickelungen von Ω_k $(k = 1 \dots l)$ in $\mu_{0,\mathfrak{b}}$ eingesetzt, so ergiebt sich aus (9.) durch Integration, dass $y_{0,\mathfrak{b}}$ die Form erhält

$$(17.) \quad \begin{cases} y_{0,\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_{0,\mathfrak{b}}} \{\psi_{\mathfrak{b},1}(x) + \psi_{\mathfrak{b},2}(x) \log(x-a) + \cdots + \psi_{\mathfrak{b},q_\mathfrak{b}}(x) (\log(x-a))^{q_\mathfrak{b}-1}\} \\ \qquad\qquad (\mathfrak{b} = 1 \dots N), \end{cases}$$

wo die Grössen ψ *sich in einem Kreise mit dem Mittelpunkte* $x = a$ *durch die Summe von zwei convergirenden Potenzreihen darstellen lassen, von denen die eine nach Potenzen von* $x-a$ *mit negativen, die andere mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreitet. Die Zahl* $q_\mathfrak{b} - 1$ *ist höchstens gleich der Anzahl derjenigen Exponenten, die in der Reihe* $r_{0,1}$, $r_{0,2}$ $\dots$ $r_{0,N}$ *vor* $r_{0,\mathfrak{b}}$ *stehen und sich von* $r_{0,\mathfrak{b}}$ *nur um ganze Zahlen unterscheiden.*

Diejenigen Integrale (17.), in welchen die Exponenten $r_{0,\mathfrak{b}}$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, bilden eine Gruppe. Wird ein System von N linearunabhängigen Integralen von $\Phi_N = 0$ durch Ausdrücke, der Form (17.), worin statt der Exponenten $r_{0,\mathfrak{b}}$ die Exponenten $\varepsilon_\mathfrak{b}$ stehen, gegeben, so kommen in diesem Systeme nur solche Exponenten $\varepsilon_\mathfrak{b}$ vor, die sich von den Grössen $r_{0,\mathfrak{b}}$ um ganze Zahlen unterscheiden. Dieses System muss in eben so viele Gruppen zerfallen, wie das System (17.) und einer Gruppe des einen Systemes eine des anderen entsprechen, so dass in beiden Gruppen

die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden und die Anzahl der Integrale dieselbe ist (Abh. Bd. 74: No. 1, (5.); No. 2, II).

Vergleicht man demnach das System (17.) mit der allgemeinen Form, welche nach Herrn *Fuchs* (Bd. 66 d. J. p. 136) ein System linearunabhängiger Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung bei einem Punkte $x = a$ hat, wenn die Coefficienten dieser Differentialgleichung in einem um den Punkt $x = a$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreise abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen sind, so ergiebt sich, *dass die Wurzeln der daselbst von Herrn Fuchs als Fundamentalgleichung bezeichneten algebraischen Gleichung, deren Coefficienten auf transcendente Weise mit den Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängen, bei der Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ die Grössen*

$$(18.) \qquad e^{r_{0,1} 2\pi i}, \quad e^{r_{0,2} 2\pi i}, \quad \ldots \quad e^{r_{0,N} 2\pi i}$$

sind.

Ist der Punkt $x = t^{-1}$, $t = 0$ in $\Phi_N(y, x) = 0$ singulär, so führt die Formel (12.) *zu entsprechenden Resultaten.*

II. Es werden nun bei dem im Endlichen liegenden singulären Punkte $x = a$ die Integrale von $\Phi_N = 0$ der Form (17.), die eine Gruppe bilden, in welchen sich also die Exponenten $r_{0,\mathfrak{b}}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, weiter untersucht. In dem Systeme normaler Differentialausdrücke, welches den Ausdruck Φ_N darstellt, seien diejenigen auf einander folgenden Bestandtheile, in welchen die in Partialbrüche zerlegten rationalen Functionen W der determinirenden Factoren e^W diejenigen Glieder, in welchen sie für $x = a$ unendlich werden, übereinstimmend haben, zu einem Ausdrucke zusammengezogen, und es sei alsdann der Ausdruck Φ_N durch folgendes System gegeben:

$$(19.) \qquad e^{w} F_{\alpha}(e^{-w} y, x) = y'_1, \quad e^{w_1} F_{\alpha_1}(e^{-w_1} y'_1, x) = y'_2, \quad \ldots \quad e^{w_k} F_{\alpha_k}(e^{-w_k} y'_k, x),$$

worin

$$(19^a.) \qquad \begin{cases} f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1 \ldots f_{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}}(y_\mathfrak{b}, x) = e^{w} F_{\alpha}(e^{-w} y, x) & \mathfrak{a}_0 + \cdots + \mathfrak{a}_\mathfrak{b} = \alpha, \\ f_{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}}(y, x) = y_{\mathfrak{b}+1} \ldots f_{\mathfrak{a}_\mathfrak{c}}(y_\mathfrak{c}, x) = e^{w_1} F_{\alpha_1}(e^{-w_1} y, x) & \mathfrak{a}_\mathfrak{b} + \cdots + \mathfrak{a}_\mathfrak{c} = \alpha_1 \quad \text{etc.} \end{cases}$$

ist, die Grössen $w_\mathfrak{a} (\mathfrak{a} = 0 \ldots k)$ von der Form Null oder $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}} (x - a)^{-\mathfrak{a}}$ und je zwei auf einander folgende von einander verschieden sind, $F_{\alpha_\mathfrak{a}}(\bar{y}_\mathfrak{a}, x) = 0$ bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null hat. Die Exponentengleichung von $F_\alpha(\bar{y}, x) = 0$ bei $x = a$ ist diejenige von

$$\bar{f}_{\mathfrak{a}_0}(\bar{y}, x) = \bar{y}_1 \ldots \bar{f}_{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}}(\bar{y}_\mathfrak{b}, x) = 0;$$

diejenige von $F_{a_1}(\bar{y}_1, x) = 0$ ist die von $\bar{f}_{a_{\mathfrak{b}+1}}(\bar{y}_1, x) = y_{\mathfrak{b}+2} \dots \bar{f}_{a_c}(\bar{y}_c, x) = 0$ u. s. w. (Vgl. No. 7, I.)

Es seien nun in der Exponentengleichung von $F_{a_g}(\bar{y}_g, x) = 0$ die s Wurzeln r_1 bis r_s unter einander nur um ganze Zahlen, und von einer Wurzel der Exponentengleichung von $F_{a_\mathfrak{a}}(\bar{y}_\mathfrak{a}, x) = 0$ ($\mathfrak{a} \gtrless g$, $\mathfrak{a} = 1 \dots k$) nicht um eine ganze Zahl verschieden. Alsdann soll die Gruppe der Integrale von $\Phi_N = 0$ mit den Exponenten r_1 bis r_s untersucht werden.

Die Wurzeln r_1 bis r_s seien so geordnet, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist, so entsprechen diesen Wurzeln s Integrale von $F_{a_g} = 0$ der Form

$$(20.) \qquad \bar{y}_\mathfrak{b} = \nu_1 \int dx\, \nu_1^{-1} \nu_2 \dots \int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \nu_\mathfrak{b}\, dx \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots s),$$

wo $\nu_\mathfrak{b} = (x-a)^{r_\mathfrak{b} - \mathfrak{b} + 1} \varphi_\mathfrak{b}(x)$ ist, $\varphi_\mathfrak{b}$ die Form $\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ hat, c_0 von Null verschieden ist, und aus (20.) ergiebt sich durch Integration in den einzelnen Gliedern, wobei die jedesmalige Integrationsconstante annullirt wird, die Gruppe von s Integralen der Form

$$(21.) \qquad \bar{y}_\mathfrak{b} = (x-a)^{r_\mathfrak{b}} \{\chi_{\mathfrak{b},1} + \chi_{\mathfrak{b},2} \log(x-a) + \dots + \chi_{\mathfrak{b},q_\mathfrak{b}} (\log(x-a))^{q_\mathfrak{b}-1}\} \ (\mathfrak{b} = 1 \dots s),$$

wo die Grössen χ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty k_\alpha (x-a)^\alpha$ haben und für $x = a$ nicht alle verschwinden, die Zahl $q_\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{b}$ und $\chi_{\mathfrak{b},q_\mathfrak{b}}$ von Null verschieden ist; die Integrale $\bar{y}_\mathfrak{b}$ gehören dann zu den Exponenten $r_\mathfrak{b}$ (s. die Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 66 d. J., p. 155.). Um die Zahl $q_\mathfrak{b}$ zu bestimmen, genügt es in den Grössen φ in (20.) $r_1 - r_s + 1$ Glieder zu entwickeln (in Betreff dieser Entwickelungen s. No. 5, II nach (31.)) und die Integrationen in (20.) auszuführen. Denn wird bei der Integration eines Ausdruckes der Form (21.), der zu dem Exponenten α gehört, wo, wenn α eine negative ganze Zahl, $-\alpha \leqq \varrho$ ist, und in den Coefficienten der Potenzen des Logarithmus ϱ Glieder von $(x-a)^\alpha$ an gerechnet bekannt sind, die in dem Coefficienten des Logarithmus mit dem höchsten Exponenten nicht alle verschwinden, die Integrationsconstante annullirt, so erhält man einen Ausdruck der Form (21.), der zu dem Exponenten $\alpha + 1$ gehört, und es werden in den Coefficienten der Potenzen des Logarithmus ϱ Glieder von $(x-a)^{\alpha+1}$ an, die in dem Coefficienten des Logarithmus mit dem höchsten Exponenten nicht alle verschwinden, bekannt durch Integration der in jedem Summanden des ursprünglichen Ausdruckes gegebenen ϱ Glieder. Dieses beruht darauf, dass

$$(22.)\quad \begin{cases} \int (x-a)^{\alpha}(x-a)^{\mathfrak{a}}(\log(x-a))^{n}\,dx \\ = (x-a)^{\alpha+1}\{s_0(\log(x-a))^{n+1}+s_1(\log(x-a))^{n}+\cdots+s_{n+1}\} \end{cases}$$

ist, wo $\mathfrak{a}$ und n ganze Zahlen $\geqq 0$ sind, $s_{\mathfrak{b}}$ die Form $k^{(\mathfrak{b})}(x-a)^{\mathfrak{c}}$ hat und, wenn α keine negative ganze Zahl ist, oder falls α eine solche ist, wenn $\mathfrak{a}$ von $-\alpha-1$ verschieden ist, dass alsdann $s_0=0$ und s_1 von Null verschieden ist, und wenn $\mathfrak{a}=-\alpha-1$, dass s_0 von Null verschieden ist.

Es werden nun die Integrale $y_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b}=1,\dots s$) von $\Phi_N=0$

$$(23.)\quad y_{\mathfrak{b}} = \mu_{0,1}\int dx\,\mu_{0,1}^{-1}\mu_{0,2}\dots\int \mu_{0,\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}}^{-1}e^{w_g}\bar{y}_{\mathfrak{b}}\,dx \quad (\mathfrak{b}=1,\ \dots\ s)$$

aufgestellt, wo die Grössen $\mu_{0,\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c}=1,\dots\alpha_0+\cdots+\alpha_{g-1}$) durch (16.) gegeben sind und bei den durch Integration der einzelnen Glieder der Potenzreihen zu bewerkstelligenden Integrationen jedesmal die willkürliche Constante annullirt werden soll. Die Integrale $y_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b}=1,\dots s$) sind linearunabhängig, weil die Integrale $\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b}=1,\dots s$) linearunabhängig sind. Die Integrale (23.) nehmen, wenn für $\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ die Ausdrücke (21.) eingesetzt werden, die Form an

$$(24.)\quad \begin{cases} y_{\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_{\mathfrak{b}}}\{\xi_{\mathfrak{b},1}(x)+\xi_{\mathfrak{b},2}(x)\log(x-a)+\cdots+\xi_{\mathfrak{b},q_{\mathfrak{b}}}(x)(\log(x-a))^{q_{\mathfrak{b}}-1}\}, \\ (\mathfrak{b}=1,\ \dots\ s) \end{cases}$$

wo die Grössen ξ in der Umgebung von $x=a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen von x sind, $\xi_{\mathfrak{b},q_{\mathfrak{b}}}(x)$ ***von Null verschieden ist.***

Es gehe jetzt das Integral (20.) $\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ bei einem Umgange um $x=a$ über in $[\bar{y}_{\mathfrak{b}}]$, so ist

$$(25.)\quad [\bar{y}_{\mathfrak{b}}] = c_1^{(\mathfrak{b})}\bar{y}_1+c_2^{(\mathfrak{b})}\bar{y}_2+\cdots+c_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{b})}\bar{y}_{\mathfrak{b}},$$

wo die $c^{(\mathfrak{b})}$ Constanten sind. Dass $\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ nach geschehenem Umgange diese Form annimmt, ergiebt sich aus dem $(\mathfrak{b}-1)$fachen Integrale (20.), aus welchem $\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ hervorgeht (siehe die Abhandlung des Herrn ***Fuchs*** Bd. 68 dieses Journals p. 363).

Um die Constanten $c^{(\mathfrak{b})}$ zu bestimmen, hat man in folgender Weise zu verfahren. Wenn ein Ausdruck Y der Form (21.) durch einen Umgang um a übergeht in $[Y]$, so geht $\int Y dx$, in welchem Integral das constante Glied in der Entwickelung annullirt wird, durch denselben Umgang in einen Ausdruck über, der gleich ist $\int [Y]\,dx+c$, wo in der Entwickelung von $\int [Y]\,dx$ kein constantes Glied vorkommt, c eine

20*

Constante ist; denn beide Ausdrücke haben dieselben Differentialquotienten. Die Constante c wird dadurch ermittelt, dass $\int Y dx$ auf die Form (21.) gebracht, alsdann in diesem Ausdrucke der Umgang um a gemacht wird; das constante Glied in der Entwickelung ist dann die Grösse c. Nun geht in (20.) $\nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}$ bei einem Umgange um a über in $e^{(r_{\mathfrak{b}}-r_{\mathfrak{b}-1}-1)2\pi i}\nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}$, daher $\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx$ in $e^{(r_{\mathfrak{b}}-r_{\mathfrak{b}-1}-1)2\pi i}\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx+k_1$, wo k_1 das constante Glied in der Entwickelung ist, in welche die Entwickelung von $\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx$ bei demselben Umgange übergeht.

Dann geht $\nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1}\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx$ über in

$$e^{(r_{\mathfrak{b}}-r_{\mathfrak{b}-2}-2)2\pi i}\nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1}\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx+k_1 e^{(r_{\mathfrak{b}-1}-r_{\mathfrak{b}-2}-1)2\pi i}\nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1},$$

daher $\int dx\,\nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1}\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx$ in

$$e^{(r_{\mathfrak{b}}-r_{\mathfrak{b}-2}-2)2\pi i}\int dx\,\nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1}\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx+k_1 e^{(r_{\mathfrak{b}-1}-r_{\mathfrak{b}-2}-1)2\pi i}\int \nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1}\,dx+k_2,$$

wo k_2 das constante Glied in der Entwickelung ist, in welche die Entwickelung von $\int dx\,\nu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}-1}\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx$ bei demselben Umgange übergeht, u. s. w. Um die Constanten k_1, k_2, etc. zu bestimmen, genügt es in den Grössen φ in (20.) $r_1-r_{\mathfrak{s}}+1$ Glieder zu entwickeln und die Integrationen in (20.) auszuführen.

Das Integral $y_{\mathfrak{b}}$ (23.) *geht nun durch denselben Umgang um a über in* $[y_{\mathfrak{b}}]$, *wo*

$$(26.)\qquad [y_{\mathfrak{b}}] = c_1^{(\mathfrak{b})}y_1+c_2^{(\mathfrak{b})}y_2+\cdots+c_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{b})}y_{\mathfrak{b}},$$

und die $c^{(\mathfrak{b})}$ *die Constanten aus* (25.) *sind.*

Dieses beruht darauf, wenn ein Ausdruck Y der Form (17.), worin $r_{0,\mathfrak{b}}$ nicht ganzzahlig ist, durch einen Umgang um a übergeht in $[Y]$, dass alsdann $\int Y dx$, bei welchem Integral das constante Glied in der Entwickelung annullirt ist, durch denselben Umgang in einen Ausdruck übergeht, der gleich $\int [Y]\,dx$ ist, wo in der Entwickelung letzteres Integrales ebenfalls das constante Glied gleich Null gesetzt ist. Denn beide Ausdrücke haben dieselben Differentialquotienten, müssen daher nach Addition einer Constanten zu einem derselben einander gleich sein. Diese Constante muss gleich Null sein, da die Coefficienten der gleichen Potenzen des Logarithmus auf beiden Seiten einander gleich sein müssen und in den Entwicke-

lungen beider Ausdrücke kein constantes Glied vorkommt. Nun geht in (23.) $\mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g} \bar{y}_{\mathfrak{b}}$ über in $e^{-r_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}}2\pi i} \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g}(c_1^{(\mathfrak{b})}\bar{y}_1+\dots+c_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{b})}\bar{y}_{\mathfrak{b}})$, daher $\int \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g} \bar{y}_{\mathfrak{b}} dx$ in

$$e^{-r_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}}2\pi i}\{c_1^{(\mathfrak{b})}\int \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g}\bar{y}_1 dx+\dots+c_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{b})}\int \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g}\bar{y}_{\mathfrak{b}} dx\}.$$

Ferner geht

$$\mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}-1}\mu_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}}\int \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g}\bar{y}_{\mathfrak{b}} dx$$

in

$$e^{-r_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}-1}2\pi i}\{c_1^{(\mathfrak{b})}\mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}-1}\mu_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}}\int \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g}\bar{y}_1 dx+\dots$$
$$\dots+c_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{b})}\mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}-1}\mu_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}}\int \mu^{-1}_{\mathfrak{v},\alpha_0+\dots+\alpha_{g-1}} e^{w_g}\bar{y}_{\mathfrak{b}} dx\}$$

über, u. s. w.

Werden in (26.) die Ausdrücke, die aus (24.) hervorgehen, auf beiden Seiten eingesetzt, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen des Logarithmus auf beiden Seiten ***die Grössen*** $\xi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ $(\mathfrak{c}=2\dots q_{\mathfrak{b}})$ ***linear mit constanten Coefficienten durch diejenigen Grössen*** $\xi_{\mathfrak{a},k}$ ***ausgedrückt, in denen*** $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ ***ist.*** (S. die Abh. des Herrn ***Fuchs***, Bd. 68 dieses Journals, p. 356). In Bezug auf die untersuchte Gruppe von Integralen von $\Phi_N=0$ hat man also folgende Resultate:

Jedes Integral tritt zunächst unter der Form eines durch mehrfache Integration zu bildenden Ausdruckes (9.) ***auf, in welcher Form unter den Integralzeichen bekannte Functionen der Form*** (16.) ***stehen*** (19.), (20.), (23.).

Nach geschehener Integration nimmt das Integral die Form (17.) ***an, wo der Exponent*** $r_{\mathfrak{v},\mathfrak{b}}$ ***und der Exponent der höchsten Potenz von*** $\log(x-a)$ (21.), (24.) ***bekannt ist. Bei einem Umgange um*** $x=a$ ***geht das Integral in eine aus den Integralen der Gruppe bestehende lineare Verbindung mit constanten Coefficienten über, welche Coefficienten bekannt sind*** (26.). ***Hierdurch wird ferner bekannt der Ausdruck der Grössen*** $\xi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ $(\mathfrak{c}=2\dots q_{\mathfrak{b}})$ ***in*** (24.), ***der durch eine lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Grössen*** $\xi_{\mathfrak{a},k}$ ***gebildet wird, in denen*** $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ ***ist. Die Grösse*** $\xi_{\mathfrak{b},q_{\mathfrak{b}}}$ (24.) ***ist unter der Form eines vielfachen Integrales*** (9.) ***darstellbar, in welchem unter den Integralzeichen bekannte Functionen der Form*** (16.) ***stehen, die übrigen Grössen*** $\xi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ $(\mathfrak{c}<q_{\mathfrak{b}})$ ***treten unter der Form einer Summe derartiger Integrale auf. Gehört die Gruppe der Integrale der Differentialgleichung*** $e^{-w}F_a(e^w y, x)=0$ ***an, so erhält man die Integrale unter der Form*** $e^w\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b}=1\dots s)$ (21.), ***wo*** $\bar{y}_{\mathfrak{b}}$ ***Integral einer Differentialgleichung, die bei*** $x=a$ ***nur reguläre Integrale hat.***

Sind nun alle Differentialgleichungen** $F_{\alpha_a}(\bar{y}_a, x) = 0$ ($\mathfrak{a} = 0 \dots k$) **so beschaffen, dass bei** $x = a$ **die Exponentengleichung von** $F_{\alpha_\mathfrak{b}} = 0$ **Wurzeln besitzt, von denen keine sich von einer Wurzel der Exponentengleichung von** $F_{\alpha_\mathfrak{c}} = 0$ ($\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{c} = 0 \dots k$) **um eine ganze Zahl unterscheidet, so erhält man alle Gruppen eines Systemes linearunabhängiger Integrale (Abh. Bd. 74, No. 1, (5.)) ***unter der vorhin betrachteten Form.***

Ist der Punkt $x = t^{-1}$, $t = 0$ in $\Phi_N = 0$ singulär, so ist aus Formel (12.) zu ermitteln, ob Voraussetzungen stattfinden, die den nach (19.) angegebenen entsprechen, worauf auch bei diesem Punkte die Gruppen linearunabhängiger Integrale in der vorhin angegebenen Form aufgestellt werden können.

III. Bei Ausführung der Integrationen (9.) nach Einsetzen der Grössen (16.), so wie bei den Integrationen in (23.), kommen Integrale der Form

$$(27.) \qquad \int e^w \sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}} dx, \quad w = \sum_1^n c_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}},$$

wo r von einer ganzen Zahl verschieden ist, vor, und es fragt sich, unter welchen Bedingungen ein solches Integral die Form

$$(28.) \qquad e^u \sum_0^\infty k_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$$

annimmt, wo u die Form $\sum_1^l k_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ hat, $\mathfrak{b}$ eine ganze Zahl ist, c_0 und k_0 von Null verschieden sind. Aus der Gleichung

$$(29.) \qquad \int e^w \sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}} dx = e^u \sum_0^\infty k_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$$

folgt durch Differentiation

$$(30.) \qquad e^w \sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}} = e^u \left\{ \frac{du}{dx} \sum_0^\infty k_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} + \frac{d}{dx} \sum_0^\infty k_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch logarithmische Differentiation

$$(31.) \qquad w = u, \quad \mathfrak{b} = n+1.$$

Daraus ergiebt sich, dass $\int e^w (x-a)^r dx$ nicht unter der Form (28.) darstellbar ist. Denn in der Entwickelung von $e^{-w}\int e^w (x-a)^r dx$ kommt das Glied $\frac{(x-a)^{r+1}}{r+1}$ vor, während nach (29.) und (30.) die Entwickelung die Form $\sum_0^\infty k_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+n+1}$ haben müsste. Ebenso kann $\int e^w \sum_0^\lambda c_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}} dx$ ($\lambda < n$) nicht die Form (28.) haben, weil das Glied $c_\lambda \frac{(x-a)^{r+\lambda+1}}{r+\lambda+1}$ in der Entwickelung von $e^{-w}\int e^w \sum_0^\lambda c_\mathfrak{a}(x-a)^{r+\mathfrak{a}} dx$ vorkommt.

Wenn nun ein Integral von $\Phi_N = 0$ wie (23.) sich unter der Form

$$(32.)\qquad (x-a)^{r_{\mathfrak{b}}+\mathfrak{c}} e^{u} \{\zeta_{\mathfrak{b},1}(x) + \zeta_{\mathfrak{b},2}(x)\log(x-a) + \cdots + \zeta_{\mathfrak{b},q_{\mathfrak{b}}}(x)(\log(x-a))^{q_{\mathfrak{b}}}\}$$

darstellen lassen soll, wo $\mathfrak{c}$ ganzzahlig ist, u gleich Null oder $\sum_1^l k_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ ist, die Grössen ζ die Form $\sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ haben, so muss, wie sich ergiebt, wenn man (23.) und (32.) successive durch die Grössen μ in (23.) dividirt und jedesmal differentiirt und zuletzt die Coefficienten der Logarithmen auf beiden Seiten einander gleich setzt, u gleich w_g sein.

Wenn man also in Differentialgleichung

$$(33.)\qquad e^{w} F_{\alpha}(e^{-w} y, x) = y_1' \quad e^{w_1} F_{\alpha_1}(e^{-w_1} y_1', x) = y_2' \ldots e^{w_g} F_{\alpha_g}(e^{-w_g} y_g', x) = 0$$

$y = e^{w_g} Y$ setzt, so ist, damit das Integral (32.) besteht, nothwendig und hinreichend, dass die Differentialgleichung für Y bei $x = a$ ein Integral der Form

$$(32^a.)\qquad (x-a)^{r_{\mathfrak{b}}+\mathfrak{c}} \{\zeta_{\mathfrak{b},1}(x) + \zeta_{\mathfrak{b},2}(x)\log(x-a) + \cdots + \zeta_{\mathfrak{b},q_{\mathfrak{b}}}(x)(\log(x-a))^{q_{\mathfrak{b}}}\},$$

besitze, wo $\mathfrak{c}$ ganzzahlig ist, die ζ die Form $\sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ haben. Um dieses zu untersuchen, wenn sich nicht der Ausdruck Φ_N durch ein solches System (19.) darstellen lässt, in welchem der erste Bestandtheil gleich Null gesetzt die Integrale mit dem Exponenten $r_{\mathfrak{b}}$ enthält, bedarf man specieller Convergenzbetrachtungen, die sich auf die formellen Entwickelungen der regulären Integrale der Differentialgleichung für Y beziehen. Enthält das Integral (32.) keinen Logarithmus, so ergiebt sich für die Coefficienten in der formellen Entwickelung von $\zeta_{1,\mathfrak{b}}(x)$ aus den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung für Y eine Recursionsformel, die eine constante Anzahl jener Coefficienten enthält. Alsdann hat man eine Anzahl Coefficienten zu berechnen und zuzusehen, ob aus diesen und der Recursionsformel sich eine allgemeine Eigenschaft der Coefficienten erkennen lässt, aus welcher die Convergenz oder Divergenz der Entwickelung geschlossen werden kann. (Vgl. Abh. Bd. 74, No. 8.)

IV. Hat man bei jedem singulären Punkte von $\Phi_N = 0$ ein System linearunabhängiger Integrale aufgestellt und verbindet man zwei solcher Punkte A und B durch eine sich selbst nicht schneidende Linie, welche keinen der anderen singulären Punkte enthält, so ist zu ermitteln, in welche lineare Verbindung der Integrale bei B mit constanten Coefficienten ein Integral bei A übergeht, wenn es auf dieser Linie zu B hingeführt wird.

Bei der Differentialgleichung

$$(34.)\qquad F_m(y, x) = s, \quad f_n(s, x) = 0,$$

wo F_m und f_n von der Form der Ausdrücke in (2.) sind und rationale Coefficienten enthalten, erfülle ein Integral y bei A die Differentialgleichung

$$(35.)\quad F_m(y, x) = s_A.$$

Geht nun s_A auf dem genannten Wege nach B über in s_B, so muss das Integral y in ein solches übergehen, welches die Differentialgleichung

$$(36.)\quad F_m(y, x) = s_B$$

erfüllt. Es seien nun bei B die Integrale von (34.) y_1 bis y_{m+n} und unter diesen y_1 bis y_m die Integrale von $F_m = 0$. $y_{m+\alpha}$ $(\alpha = 1 \dots n)$ erfülle die Differentialgleichung

$$(37.)\quad F_m(y, x) = s_\alpha \quad (\alpha = 1 \dots n).$$

Es ist dann zunächst aus $f_\alpha = 0$ der Ausdruck s_B, der durch die Grössen s_α dargestellt wird, zu ermitteln

$$(38.)\quad s_B = k_1 s_1 + k_2 s_2 + \dots + k_n s_n,$$

wo die k Constanten. *Dann wird das betreffende Integral y bei B ausgedrückt durch*

$$(39.)\quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m + k_1 y_{m+1} + \dots + k_n y_{m+n},$$

wo die c m neue Constanten.

Die Constanten k bestimmt man, wenn man die Werthe von s_B und von s_α $(\alpha = 1 \dots n)$ und deren $n-1$ ersten Ableitungen in einem Punkte C kennt. Ist f_n ein normaler Differentialausdruck, so erhält man aus den Reihenentwickelungen der Integrale bei einem singulären Punkte a die Werthe von s_α in C unter der Form einer Summe einer endlichen Anzahl von Summanden, die Ausdrücke der Form

$$e^{W_c}(\log(C-a))^x (C-a)^r \sum_0^\infty L_\alpha (C-a)^\alpha$$

haben, wo e^{W_c} der Werth des determinirenden Factors in C, x eine positive ganze Zahl und L_α eine rationale Function der Constanten ist, die in den rationalen Coefficienten von f_n, deren Nenner in Factoren aufgelöst sind, vorkommen.

Ebenso sind die Constanten c zu bestimmen, wenn man in einem Punkte C die Werthe von y und y_α $(\alpha = 1 \dots m+n)$ und den $m-1$ ersten Ableitungen kennt. Wenn in der Differentialgleichung (34.) ein System normaler Differentialausdrücke gleich Null gesetzt ist, so ergeben sich aus den Reihenentwickelungen der Integrale bei einem singulären Punkte a jene Werthe unter der Form einer Summe einer endlichen Anzahl von

Summanden, die die Form

$$(C-a)^r(\log(C-a))^n\left(\sum_1^\infty L_{-a}(C-a)^{-a}+\sum_0^\infty L_a(C-a)^a\right)$$

haben, wo n eine positive ganze Zahl ist, L_{-a} und L_a einfach oder mehrfach unendliche Reihen sind, deren Elemente rationale Functionen der Constanten sind, die in den rationalen Coefficienten von F_m und f_n vorkommen.

In der Differentialgleichung $\Phi_N=0$ sind bei je zwei singulären Punkten successive die linearen Relationen zwischen den Integralen von $f_{a_0}=0$, $f_{a_0}=y_1$ $f_{a_1}=0$ u. s. w. aufzustellen.

10.

Im Anschlusse an die Untersuchungen in No. 7 werden nun folgende Sätze über einen durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbaren Differentialausdruck entwickelt.

I. Es sei $\Phi_N(y,x)$ ein System normaler Differentialausdrücke, diese Differentialausdrücke seien in unzerlegbare Bestandtheile aufgelöst, alsdann seien je zwei Bestandtheile des Systemes von Φ_N nicht einander ähnlich (No. 7, III).

Es mögen nun in dem Systeme Φ_N zwei auf einander folgende Gruppen von Bestandtheilen von folgender Beschaffenheit vorkommen. Die zweite Gruppe bestehe aus einem unzerlegbaren normalen Differentialausdrucke, und dasjenige System normaler Differentialausdrücke, welches aus den Bestandtheilen dieser beiden Gruppen in derselben Reihenfolge zusammengesetzt ist, soll nicht durch ein solches System normaler Differentialausdrücke dargestellt werden können, in welchem ein Differentialausdruck, der dem in der zweiten Gruppe enthaltenen ähnlich ist, an der Spitze des Systemes steht.

Alsdann kann in keiner Darstellung von Φ_N durch ein System normaler Differentialausdrücke (Vgl. No. 7, III, *c.*)) ***ein dem Differentialausdrucke der zweiten Gruppe ähnlicher Bestandtheil vor allen Ausdrücken, die denen der ersten Gruppe ähnlich sind, stehen.***

Das System Φ_N bestehe zunächst aus drei Gruppen von Bestandtheilen. Die Bestandtheile der ersten Gruppe bilden das System F_{a_0}, die beiden anderen Gruppen seien durch die beiden unzerlegbaren normalen Differentialausdrücke f_{a_1} und f_{a_2} gebildet, so dass

$$(1.)\qquad F_{a_0}(y,x)=y_1\quad f_{a_1}(y_1,x)=y_2\quad f_{a_2}(y_2,x)=\Phi_N(y,x).$$

Die beiden ersten Gruppen sollen die in dem Satze vorausgesetzte Be-

schaffenheit haben. Wenn nun in einer Darstellung von Φ_N ein dem Differentialausdrucke f_{a_1} ähnlicher an der Spitze stehen könnte, so würde das auf diesen Ausdruck und das System (1.) angewandte Verfahren von No. 4, I ergeben, wenn dabei der Satz No. 7, II, *a.*) und die Voraussetzung, dass je zwei unzerlegbare Bestandtheile in (1.) nicht ähnlich sein sollen, berücksichtigt werden, dass jener Differentialausdruck auch in einer Darstellung des Systemes $F_{a_0}(y, x) = y_1 \; f_{a_1}(y_1, x)$ an der Spitze stehen könnte, entgegengesetzt der Voraussetzung. Es bleibt also der Fall zu untersuchen, wo in einer Darstellung von Φ_N ein f_{a_2} ähnlicher Ausdruck an der Spitze steht. Alsdann ergiebt sich durch das Verfahren von No. 4, I und Satz No, 7, II, *a.*), dass das System Φ_N dargestellt werden kann durch

$$(2.) \qquad \chi_{a_2}(y, x) = y_1 \quad \chi_{a_0}(y_1, x) = y_2 \quad \chi_{a_1}(y_2, x) = \Phi_N(y, x),$$

wo χ_{a_1} und χ_{a_2} den Ausdrücken f_{a_1} bezüglich f_{a_2} ähnliche sind, χ_{a_0} ein dem Systeme F_{a_0} ähnliches System ist. Wenn nun auch folgende Darstellung von Φ_N möglich wäre

$$(3.) \qquad \chi_{a_2}(y, x) = y_1 \quad \psi_{a_1}(y_1, x) = y_2 \quad \psi_{a_0}(y_2, x) = \Phi_N(y, x),$$

wo ψ_{a_1} dem Ausdrucke f_{a_1} ähnlich wäre, ψ_{a_0} ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke sein soll, von denen je einer ***einem*** Bestandtheile des Systemes F_{a_0} ähnlich ist und umgekehrt, so müssten nach No. 7, V (Gl. (23.) und (24.)) in der reciproken Differentialgleichung von $\Phi_N = 0$, $\underline{\Phi}_N(\underline{y}, x) = 0$, die Integrale der Differentialgleichungen

$$\underline{\psi}_{a_0}(\underline{y}, x) = 0, \quad \underline{\chi}_{a_1}(\underline{y}, x) = 0 \quad \text{und} \quad \underline{f}_{a_2}(\underline{y}, x) = 0$$

enthalten sein, wo $\underline{\psi}_{a_0}$, $\underline{\chi}_{a_1}$, $\underline{f}_{a_2}$ bezüglich die zu ψ_{a_0}, χ_{a_1}, f_{a_2} reciproken Differentialausdrücke sind. Diese Integrale sind unter einander linearunabhängig (No. 7, IV, *c.*) und V, *a.*), Schluss). Daher kann man nach No. 7, IV, *a.*) $\underline{\Phi}_N(\underline{y}, x)$ die Form geben

$$(4.) \qquad \underline{\psi}_{a_0}(\underline{y}, x) = y_1 \quad \underline{\varphi}_{a_2}(y_1, x) = y_2 \quad \underline{\varphi}_{a_1}(y_2, x) = \underline{\Phi}_N(\underline{y}, x),$$

wo $\underline{\varphi}_{a_1}$ und $\underline{\varphi}_{a_2}$ den Ausdrücken $\underline{\chi}_{a_1}$ bezüglich $\underline{f}_{a_2}$ ähnlich sind. Hieraus ergiebt sich nach No. 7, V, Gl. (23.), (24.), dass $\Phi_N(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $F_{a_1}(y, x) = 0$ enthalten müsste, wo F_{a_1}, der reciproke Differentialausdruck zu $\underline{\varphi}_{a_1}$, dem Ausdrucke f_{a_1} ähnlich sein müsste, was nach dem oben Gesagten nicht möglich ist.

Bei dem Beweise des allgemeinen Satzes ist das ursprüngliche System Φ_N nach dem Verfahren von No. 4 umzuformen.

Wenn es eine der Behauptung des Satzes entgegenstehende Darstellung von Φ_N gäbe, die als zweites System bezeichnet werde, so könnte der erste unzerlegbare Bestandtheil derselben nicht einem Bestandtheile aus der ersten der beiden in dem Satze hervorgehobenen Gruppen ähnlich sein. Er könnte auch nicht dem Differentialausdrucke in der zweiten Gruppe ähnlich sein. Denn dann würde das Verfahren von No. 4, I und No. 7, II, *a.*) auf diesen Bestandtheil und auf die ursprüngliche Darstellung von Φ_N angewandt ergeben, dass eine Darstellung des aus jenen beiden in dem Satze bemerkten Gruppen zusammengesetzten Systemes besteht, welche der Voraussetzung widerspricht. Wenn nun der dem ersten Bestandtheile des zweiten Systemes ähnliche Ausdruck in dem ursprünglichen Systeme vor den genannten beiden Gruppen steht, so bleiben diese bei der Umformung des ursprünglichen Systemes nach No. 4, I, durch welche jener erste Bestandtheil des zweiten Systemes an die Spitze der Darstellung tritt, ungeändert. Steht aber der dem ersten Bestandtheile des zweiten Systemes ähnliche Ausdruck in dem ursprünglichen Systeme nach den genannten beiden Gruppen, so komm tman bei der bezeichneten Umformung auf drei auf einander folgende Gruppen, von denen die beiden ersten die in dem Satze betrachteten sind, die dritte aus einem zu dem ersten Bestandtheile des zweiten Systemes ähnlichen Differentialausdrucke besteht. Diese drei Gruppen seien die Ausdrücke (1.) F_{a_0}, f_{a_1} und f_{a_2}. Durch weitere Umformung des Systemes (1.) nach No. 4 kommt man dann auf das System (2.), worin die Gruppen χ_{a_0} und χ_{a_1} nach dem bei (2.) etc. Bewiesenen wieder die in dem Satze vorausgesetzte Eigenschaft haben. Diese beiden Gruppen bleiben bei der weiteren Umformung ungeändert.

Nachdem man nun den ersten Bestandtheil des zweiten Systemes durch Umformen des ursprünglichen nach No. 4 an die Spitze der Darstellung von Φ_N gebracht hat, sind auf letztere Darstellung dieselben Betrachtungen anzuwenden. Indem man so fortfährt, findet man, dass eine der Behauptung des Satzes entgegenstehende Darstellung von Φ_N nicht bestehen kann.

II. Ein durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbarer Differentialausdruck Φ_N werde in folgender Weise dargestellt:

$$(5.)\qquad f_{a_0}(y, x) = y_1, \quad f_{a_1}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad f_{a_l}(y_l, x) = \Phi_N(y, x),$$

wo f_{a_k} $(k = 0 \ldots l)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determiniren-

den Factor Ω_k ist, ***und zwar von denjenigen normalen Differentialausdrücken, die an derselben Stelle mit demselben determinirenden Factor*** Ω_k ***etwa auftreten können, der von der höchsten Ordnung.***

Es kann an derselben Stelle bei demselben determinirenden Factor nur ***ein*** normaler Differentialausdruck von höchster Ordnung vorhanden sein, wie sich aus den Sätzen No. 2, II, No. 3, I und II ergiebt.

Ferner sollen in der Darstellung (5.) ***die normalen Differentialausdrücke mit dem determinirenden Factor*** 1 ***den anderen möglichst vorangestellt werden.***

Es ist also zuerst zuzusehen, ob der erste Bestandtheil in (5.) regulär sein kann, ferner, wenn ein nichtregulärer Bestandtheil in (5.) aufgenommen ist, ob auf diesen ein regulärer folgen kann.

Eine solche Darstellung des durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbaren Differentialausdruckes Φ_N heisse eine ***canonische.***

Es seien nun von den unzerlegbaren Bestandtheilen des Systemes Φ_N nicht je zwei einander ähnlich. Diese Bedingung ist jedenfalls erfüllt, sobald in der canonischen Darstellung die Bestandtheile mit demselben determinirenden Factor gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, von denen jede einen singulären Punkt enthält, bei dem die Wurzeln der Exponentengleichung sich untereinander und von den Wurzeln der Exponentengleichungen der übrigen Differentialgleichungen bei diesem Punkte nicht um ganze Zahlen unterscheiden (No. 7, I, *a*). Wenn alsdann in einer canonischen Darstellung von Φ_N auf einen nichtregulären Differentialausdruck ein regulärer folgt, so bilden die unzerlegbaren auf einander folgenden Bestandtheile des ersteren und der erste unzerlegbare Bestandtheil in dem letzteren in dem Systeme von Φ_N zwei auf einander folgende Gruppen von Bestandtheilen, wie sie in Satz I dieser No. vorausgesetzt sind, was aus den Eigenschaften der canonischen Darstellung folgt. Bei irgend einer Umformung von Φ_N ist daher Satz I in Rücksicht auf die Bestandtheile dieser beiden Gruppen anwendbar.

Sollen nun bei einem durch ein System normaler Differentialausdrücke gegebenen Differentialausdrucke die Darstellungen desselben durch Systeme homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten aufgestellt werden, so hat man von den Sätzen No. 7, III auszugehen und die Sätze No. 7, VI und dieser No. I und II bei Anwendung des in der No. 5 und No. 6 dargestellten Verfahrens zu berücksichtigen.

III. Der durch ein System normaler Differentialausdrücke ausdrück-

bare Differentialausdruck Φ_N sei in canonischer Form dargestellt. ***Alsdann sollen die normalen Differentialausdrücke näher betrachtet werden, die gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale in $\Phi_N = 0$ enthalten sind.*** Bei demselben determinirenden Factor kann nur ***ein*** solcher Differentialausdruck von höchster Ordnung vorhanden sein, und derselbe gleich Null gesetzt muss eine Differentialgleichung liefern, welche die Integrale jeder Differentialgleichung enthält, in der einer der betrachteten Differentialausdrücke mit demselben determinirenden Factor gleich Null gesetzt ist (No. 2, II, No. 3, I und II).

In einem solchen normalen Differentialausdrucke, der von denen mit demselben determinirenden Factor die höchste Ordnung hat, $F(y, x)$, sei der determinirende Factor Ω_k. Aus der canonischen Darstellung von Φ_N werde nun das System $S(y, x)$ derjenigen normalen Differentialausdrücke herausgenommen, die vor dem Bestandtheile mit dem determinirenden Factor Ω_k stehen (No. 7, III, *a.*)). Alsdann werden die Integrale von $F = 0$ und $S = 0$ in einer Differentialgleichung, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen jener ist, nach No. 7, IV, *a.*) und *c.*) vereinigt. Hieraus und aus den Eigenschaften der canonischen Darstellung von Φ_N folgt nun:

Die Ordnung von F kann nicht grösser sein, als die des ersten Bestandtheiles G in der canonischen Darstellung von Φ_N, welcher denselben determinirenden Factor wie F enthält. Werden die regulären Differentialausdrücke in diesen beiden normalen gleich Null gesetzt, so entstehen Differentialgleichungen, bei denen bei jedem Punkte die Wurzeln der Exponentengleichung der ersten sich von eben so vielen Wurzeln der Exponentengleichung der zweiten nur um ganze Zahlen unterscheiden. Es folgt weiter (No. 7, IV, *a.*), *c.*) ***und*** III, *c.*)):

Wenn die Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ ***vollständig in solche Differentialgleichungen zerfallen soll*** (No. 7, V, *b.*), ***in denen normale Differentialausdrücke gleich Null gesetzt sind,*** so ergiebt sich als nothwendig und hinreichend:

In einer canonischen Darstellung von Φ_N müssen die determinirenden Factoren in je zwei Bestandtheilen von einander verschieden sein und ein etwa vorhandener regulärer Bestandtheil darf nur zu Anfang stehen. Die Ordnungen der vorhin betrachteten Ausdrücke F und G müssen übereinstimmen und die Anzahl der Ausdrücke F muss gleich der der Bestandtheile in der canonischen Darstellung sein.

Nachdem aus einer canonischen Darstellung von Φ_N diese Eigenschaften der hier betrachteten Differentialausdrücke erkannt sind, ist nach

dem Verfahren No. 5 aus der Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ zu ermitteln, ob solche Ausdrücke bestehen. Vereinigt man die Integrale der Differentialgleichungen, in welchen diese Ausdrücke gleich Null gesetzt sind, in einer Differentialgleichung, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen jener ist, $\varphi_n = 0$ (No. 7, IV, *a.*) und *c.*)) und stellt Φ_N unter der Form

$$\varphi_n(y, x) = s, \quad \psi_{N-n}(s, x) = \Phi_N(y, x)$$

dar, wo ψ_{N-n} ein homogener linearer Differentialausdruck $(N-n)^{\text{ter}}$ Ordnung, so erhält man eine Darstellung von Φ_N, die für die Betrachtung der Integrale von $\Phi_N = 0$ von Wichtigkeit ist (s. folgende No.).

11.

Es sei also jetzt die homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m = F_m(y, x) = 0$$

vorgelegt.

I. ***Nun werde untersucht, ob sich Differentialgleichung $F_m = 0$ unter der Form***

$$(2.) \qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x) = 0$$

darstellen lässt, wo Φ_N und F_{m-N} Differentialausdrücke der Form von F_m bezüglich N^{ter} und $(m-N)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten sind, Φ_N sich durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellen lässt, und entweder $m-N = 0$ ist, oder wenn $m-N > 0$ ist, unter den Integralen von $F_{m-N} = 0$ nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung enthalten sind, in welcher ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist.

In der Darstellung der Differentialgleichung (1.) unter der Form (2.) und den angegebenen Bedingungen sind die beiden Differentialausdrücke Φ_N und F_{m-N} nur auf ***eine*** Weise möglich (No. 4).

Zunächst ist nun nach No. 7, I aus $F_m(y, x) = 0$ die obere Grenze für die Zahl N zu bestimmen. Alsdann ist unter Anwendung der in den No. 5 und 6 entwickelten Methoden die Darstellung von $F_m(y, x)$ unter der Form

$$(3.) \qquad f_{\alpha_0}(y, x) = y_1 \quad F_{m-\alpha_0}(y_1, x)$$

aufzusuchen, wo f_{α_0} ein normaler Ausdruck α_0^{ter} Ordnung, $F_{m-\alpha_0}$ ein Ausdruck der Form von F_m $(m-\alpha_0)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten ist. Hier-

auf ist die Darstellung von $F_{m-\mathfrak{a}_0}$ unter der Form

$$(4.)\qquad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2 \quad F_{m-\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1}(y_2, x)$$

aufzusuchen, wo $f_{\mathfrak{a}_1}$ ein normaler Ausdruck $\mathfrak{a}_1^{\text{ter}}$ Ordnung, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1}$ ein Ausdruck der Form von F_m $(m-\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten ist, bis schliesslich $F_m(y, x)$ unter der Form

$$(5.)\qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1 \quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2 \dots f_{\mathfrak{a}_l}(y_l, x) = s \quad F_{m-N}(s, x)$$

dargestellt ist, wo $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k = 0 \dots l)$ ein normaler Differentialausdruck $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_l = N$ ist. Hierbei sei der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$

$$(6.)\qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1 \quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2 \dots f_{\mathfrak{a}_l}(y_l, x) = \Phi_N(y, x)$$

durch das System (6.) in *canonischer* Darstellung (No. 10, II) gegeben.

Bei dieser Darstellung von $F_m(y, x)$, wo Φ_N unter canonischer Form gegeben wird, hat man in Bezug auf die formellen Entwickelungen, die nach No. 5 erforderlich sind, immer zuerst den Fall ins Auge zu fassen, der am Schlusse von No. 5 betrachtet ist. Enthält $F_m = 0$ einen solchen singulären Punkt, bei welchem entweder eine Coefficientengleichung (No. 6) nicht besteht, oder diejenigen, die bestehen, nur einfache Wurzeln enthalten, und bei welchem in der Exponentengleichung je zwei Wurzeln sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so behält dieser Punkt nach No. 6, I und III und No. 7, I auch in den Differentialgleichungen $F_{m-\mathfrak{a}_0} = 0$, $F_{m-\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1} = 0$ etc. diese Eigenschaft, und *man weiss von vorn herein,* dass man alle formellen Entwickelungen, die nach No. 5 gebraucht werden, bei diesem Punkte vornehmen kann, ohne auf unbestimmte Constanten zu stossen. (Vgl. No. 7, VI, *b.*)).

II. Hat die Differentialgleichung (1.) $F_m = 0$ die Darstellung (2.) $\Phi_N(y, x) = s_1$, $F_{m-N}(s, x) = 0$ erhalten, wo Φ_N durch das System (6.) gegeben ist, so kann man unter Anwendung der Methode, die in No. 7, V, *b.*) gegeben ist, zusehen, ob die Differentialgleichung $F_m = 0$ in zwei homogene lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten

$$\Phi_N(y, x) = 0, \quad \Psi_{m-N}(y, x) = 0$$

zerfällt (No. 7, V, *b.*)).

Ueber die verschiedenen Darstellungen des durch ein System normaler Differentialausdrücke (6.) *gegebenen Differentialausdruckes* $\Phi_N(y, x)$ *siehe No.* 10, II.

III. *In Bezug auf die Integrale der Differentialgleichung* (1.) $F_m = 0$, *nachdem dieselbe unter der Form* (2.), *wo* Φ_N *durch* (6.) *gegeben ist, dargestellt worden ist, werde erstens der Fall* $m - N > 0$ *betrachtet.*

Bei einem nicht singulären Punkte von $F_m = 0$ werde ein System von m linearunabhängigen Integralen dieser Differentialgleichung entwickelt, unter denen sich N linearunabhängige von $\Phi_N = 0$ befinden. Bei einem solchen Punkte ist der charakteristische Index in $\Phi_N = 0$ und $F_{m-N} = 0$ gleich Null, und der Punkt ist in $\Phi_N = 0$ entweder nicht singulär oder ausserwesentlich singulär. In Betreff der Entwickelungen dieser m Integrale s. No. 9 Gl. (5.), (20.), (21.) und ferner Abh. Band 81 pag. 3. Es seien nun von einem Integrale von $F_m = 0$ und seinen $m-1$ ersten Ableitungen die Werthe in dem betreffenden Punkte gegeben. Die Determinante des Systemes der m linearunabhängigen Integrale in diesem Punkte ist endlich und von Null verschieden (s. die Abhandlung des Herrn *Fuchs*, Bd. 66 p. 128 Gl. (3.)) und in dem Ausdrucke eines Integrales von $F_m = 0$, welcher durch eine lineare Verbindung der m linearunabhängigen Integrale mit constanten Coefficienten gegeben wird, sind diese Coefficienten durch ein System von m linearen Gleichungen vermittelst der in dem Punkte gegebenen Werthe des Integrales und seiner $m-1$ ersten Ableitungen eindeutig bestimmt. Die Entwickelungen der m linearunabhängigen Integrale sind zu dem Zwecke bis zur Potenz mit dem Exponenten $m-1$ zu nehmen. Ergiebt sich nun, dass in dem Ausdrucke des betreffenden Integrales von $F_m = 0$ durch eine lineare Verbindung der m linearunabhängigen Integrale mit constanten Coefficienten nur Coefficienten der Integrale von $\Phi_N = 0$ von Null verschieden sind, so erfüllt das Integral letztere Differentialgleichung und ist mittels dieser weiter zu untersuchen.

Soll ein Integral von $F_m = 0$ bei einem singulären Punkte dieser Differentialgleichung regulär sein und ist bei diesem Punkte der charakteristische Index von $F_{m-N} = 0$ gleich $m-N$, so muss das Integral die Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ erfüllen (s. No. 3, I).

In diesen beiden Fällen kommt man also zur weiteren Untersuchung eines Integrales von $F_m = 0$ auf die Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ zurück.

Es werde *zweitens der Fall* $m-N=0$ betrachtet, oder es werden die Integrale der Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ untersucht.

Von diesen Integralen sind in No. 9, I *bei den singulären Punkten von* $\Phi_N = 0$ *Entwickelungen gegeben,* aus denen immer die Wurzeln der zu einem singulären Punkte gehörenden von Herrn *Fuchs* als Fundamentalgleichung bezeichneten algebraischen Gleichung hervorgehen, wodurch in der allgemeinen Form, die ein System linearunabhängiger Integrale bei einem solchen

Punkte annimmt (s. die Abhandlung des Herrn *Fuchs*, Bd. 66, p. 136), die Anzahl der Gruppen der Integrale und die Anzahl der linearunabhängigen Integrale, die zu einer Gruppe gehören, und die Exponenten der Potenzen in den Potenzreihen der Entwickelungen bis auf ganze Zahlen bekannt werden.

Dann kann man bei den singulären Punkten nach No. 9, II im Allgemeinen *die zu einer Gruppe gehörenden linearunabhängigen Integrale in solchen Formeln aufstellen*, aus denen in der Entwickelung jedes Integrales die höchste Potenz des Logarithmus bekannt wird, und aus denen die constanten Coefficienten in der linearen Verbindung der Integrale mit constanten Coefficienten, in welche Verbindung ein Integral bei einem Umgange um den singulären Punkt übergeht, bekannt werden, wodurch zugleich die linearen Relationen zwischen den Coefficienten der Potenzen des Logarithmus erhalten werden.

Besonders hervorzuheben ist der Fall, wo $\Phi_N=0$ eine solche Differentialgleichung ist, oder in mehrere solche zerfällt (No. 7, V, *b*.)), die dadurch entstehen, dass normale Differentialausdrücke gleich Null gesetzt sind (in Betreff dieses Falles s. No. 10, III). Denn alsdann nehmen die Integrale die Form $e^W U$ an, wo W eine rationale Function ist, U das vollständige Integral einer Differentialgleichung, in welcher ein regulärer Ausdruck gleich Null gesetzt ist. Vgl. No. 8, II.

Es kann ferner von einem Integrale von $\Phi_N=0$, wo Φ_N durch das System normaler Ausdrücke $f_{\alpha_0}(y,x)=y_1,\ f_{\alpha_1}(y_1,x)=y_2 \ldots f_{\alpha_l}(y_l,x)$ dargestellt ist, untersucht werden, ob dasselbe einer linearen homogenen Differentialgleichung *niedrigerer Ordnung* $f_{\alpha_0}=0$, $f_{\alpha_0}=y_1\ f_{\alpha_1}=0$ etc. genügt.

Hier ist wie oben $(m-N>0)$ der Fall zu beachten, wo bei einem nicht singulären Punkte der Differentialgleichung $\Phi_N=0$ die Werthe eines Integrales von $\Phi_N=0$ und seiner $N-1$ ersten Ableitungen gegeben sind; ferner der Fall, wo ein Integral von $\Phi_N=0$ bei einem singulären Punkte dieser Differentialgleichung regulär sein soll und $\Phi_N=0$ die Darstellung

$$\Psi_n(y,x)=s \quad \chi_{N-n}(s,x)=0$$

hat, wo Ψ_n und χ_{N-n} Systeme normaler Ausdrücke sind, und bei diesem Punkte der charakteristische Index von $\chi_{N-n}=0$ gleich $N-n$ ist, so dass das Integral die Differentialgleichung $\Psi_n=0$ erfüllen muss. Ist in der Entwickelung eines Integrales von $\Phi_N=0$ unter der Form No. 9, Gl. (17.) der Exponent einer Potenz in den Potenzreihen bis auf eine ganze Zahl gegeben, so kann man nach No. 9, I das System Φ_N so auf die Form

$\Psi_n(y, x) = s\ \chi_{N-n}(s, x)$ bringen, dass Ψ_n das System derjenigen Bestandtheile von Φ_N ist, welches gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung liefert, die Integrale mit dem gegebenen Exponenten enthält.

Bei dieser Untersuchung der Integrale von $\Phi_N = 0$ sind *die verschiedenen Darstellungsformen* von Φ_N durch Systeme normaler Differentialausdrücke zu berücksichtigen. Besonders ist die Darstellung von Φ_N $\Psi_n(y, x) = s$ $\chi_{N-n}(s, x) = \Phi_N(y, x)$ zu betrachten, wo die Integrale von $\Psi_n = 0$ aus den linearunabhängigen Integralen derjenigen Differentialgleichungen bestehen, in welchen normale Differentialausdrücke gleich Null gesetzt sind, und deren Integrale die Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ erfüllen (s. No. 10, III).

Ergiebt sich aus einer Darstellung von Φ_N, dass ein bei einem singulären Punkte von $\Phi_N = 0$ zu untersuchendes Integral dieser Differentialgleichung einer solchen Differentialgleichung genügt, die aus einem gleich Null gesetzten Systeme normaler Ausdrücke besteht, in welchen die in Partialbrüche zerlegten rationalen Functionen W der determinirenden Factoren e^W die Summe der Glieder, in denen sie bei dem singulären Punkte unendlich werden, übereinstimmend haben gleich w, wo $w = 0$ ist, wenn W bei diesem Punkte nicht unendlich wird, so hat das Integral die Form $e^w u$, wo u einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coëfficienten genügt, die bei diesem Punkte den charakteristischen Index gleich Null, demnach bei demselben Punkte *nur reguläre* Integrale hat.

Greifswald, den 18. November 1876.

Ueber das Schliessungsproblem bei zwei Kegelschnitten.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Tübingen.)

Sind die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Dreieckscoordinaten $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ und $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, so hängt das in der Ueberschrift angegebene Problem wesentlich ab von dem Integrale des Differentiales:

$$(1.)\qquad dJ = \frac{\Sigma \pm \alpha_1 x_2 dx_3}{\frac{1}{2}\{\alpha_1 f'(x_1) + \alpha_2 f'(x_2) + \alpha_3 f'(x_3)\}\sqrt{\varphi(x_1, x_2, x_3)}},\quad f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

In der folgenden Note sind, nach Darlegung dieser Abhängigkeit, zwei Substitutionen angegeben, deren jede in einfacher Weise das Integral $\int dJ$ in die Grundform der elliptischen Transcendenten $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$ *) überführt. —

Setzt man der Kürze wegen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \varphi(xy) = \frac{1}{2}\varphi'(x_1).y_1 + \frac{1}{2}\varphi'(x_2).y_2 + \frac{1}{2}\varphi'(x_3).y_3, \\ \varphi(xx) = \frac{1}{2}\varphi'(x_1).x_1 + \frac{1}{2}\varphi'(x_2).x_2 + \frac{1}{2}\varphi'(x_3).x_3 \\ \qquad\quad = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \text{etc.}, \end{cases}$$

so wird die Verbindungslinie zweier auf $f = 0$ gelegenen Punkte x und y den Kegelschnitt $\varphi = 0$ berühren, wofern:

$$(3.)\qquad \varphi(xx)\varphi(yy) - \varphi(xy)\varphi(xy) = 0.$$

Durch totale Differentiation dieser Gleichung folgt:

$$\varphi(x\,dx)\varphi(yy) + \varphi(xx)\varphi(y\,dy) - \varphi(xy)\varphi(x\,dy) - \varphi(xy)\varphi(y\,dx) = 0,$$

---

*) Dieses Integral, sowie die Darstellung von g_2 und g_3 durch die fundamentalen Invarianten der beiden Kegelschnitte bilden den Ausgangspunkt der schönen Untersuchungen des Herrn *Simon* über die *Invarianten*relationen, die beim Schliessungsprobleme sich darbieten. Man vergleiche dessen Abhandlung „*Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem*" Bd. 81 dieses Journals S. 301 ff. Daselbst ist auch die anderweitige Literatur über diesen Gegenstand angegeben. Die beiden folgenden Substitutionen halte ich der Veröffentlichung werth, weil sie, abgesehen vom formalen Interesse, es gestatten, die Theorie der elliptischen Functionen auch für die Bildung gewisser mit der Aufgabe verknüpften *Covarianten* zu verwerthen.

oder im Hinblick auf (3.) und nach Division mit $\varphi(xy)$:

$$\frac{\varphi(x\,dx)\varphi(xy)-\varphi(xx)\varphi(y\,dx)}{\varphi(xx)} = -\frac{\varphi(y\,dy)\varphi(xy)-\varphi(yy)\varphi(x\,dy)}{\varphi(yy)}.$$

Unter Einführung willkürlicher Grössen α_1, α_2, α_3 kann die letzte Gleichung auch in die Form gebracht werden:

$$(4.)\quad \frac{(\Sigma\pm\varphi'(x_1)\varphi'(y_2)f'(x_3))(\Sigma\pm\alpha_1 x_2\,dx_3)}{f(\alpha x)\varphi(xx)} = -\frac{(\Sigma\pm\varphi'(y_1)\varphi'(x_2)f'(y_3))(\Sigma\pm\alpha_1 y_2\,dy_3)}{f(\alpha y)\varphi(yy)}.$$

Man hat, um dies einzusehen, lediglich auf jeden der beiden Zähler in (4.) das Multiplicationstheorem der Determinanten anzuwenden und die Relationen zu berücksichtigen:

$$(5.)\quad \begin{cases} f(xx)=0, & f(x\,dx)=0, \\ f(yy)=0, & f(y\,dy)=0. \end{cases}$$

Da jedoch

$$\varphi(xy)(\Sigma\pm\varphi'(x_1)\varphi'(y_2)f'(x_3)) = -\varphi(xx)(\Sigma\pm\varphi'(x_1)\varphi'(y_2)f'(y_3))\,^{*}),$$

so hat man schliesslich:

$$(6.)\quad \frac{\Sigma\pm\alpha_1 x_2\,dx_3}{f(\alpha x)\sqrt{\varphi(xx)}} = -\frac{\Sigma\pm\alpha_1 y_2\,dy_3}{f(\alpha y)\sqrt{\varphi(yy)}}.$$

Dabei sind die Wurzelgrössen $\sqrt{\varphi(xx)}$ und $\sqrt{\varphi(yy)}$ nach (3.) durch die Beziehung verknüpft

$$\sqrt{\varphi(xx)}\sqrt{\varphi(yy)} = \varphi(xy).$$

Um das hier auftretende elliptische Differential dJ (cfr. 1) auf die Normalform zu reduciren, erinnern wir an die Gleichung zwischen den ternären quadratischen Formen f, φ und ihren beiden fundamentalen Covarianten ψ, Ω, die aus der Zwischenform

$$N = \tfrac{1}{4}\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}u_3$$

durch die Operationen abgeleitet sind:

$$\psi = \tfrac{3}{2}\sum_\alpha\sum_\beta\frac{\partial^2 N}{\partial x_\alpha\partial u_\beta}\frac{\partial^2 N}{\partial x_\beta\partial u_\alpha};\quad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$$

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\sum_\alpha\frac{\partial N}{\partial u_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} = \tfrac{1}{8}\Sigma\pm\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right).$$

---

*) Diese Gleichung ergiebt sich leicht, wenn man

$$t_1 = \varphi'(x_2)\varphi'(y_3)-\varphi'(x_3)\varphi'(y_2),\quad \ldots\quad t_3 = \varphi'(x_1)\varphi'(y_2)-\varphi'(y_1)\varphi'(x_2)$$

setzt und die evidente Gleichung $\Sigma\pm t_1 x_2 y_3 = 0$ mit $\Sigma\pm\varphi'(x_1)f'(x_2)f'(y_3)$ multiplicirt.

Diese Gleichung nimmt unter Einführung der Bezeichnungen:

$$\tfrac{1}{8}\Sigma\pm\left[\frac{\partial^2(\varkappa f+\lambda\varphi)}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2(\varkappa f+\lambda\varphi)}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2(\varkappa f+\lambda\varphi)}{\partial x_3^2}\right] = G(\varkappa\lambda),$$

$$\tfrac{1}{36}\left(\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa^2}\,\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\partial\lambda}\,\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\partial\lambda}\right) = H(\varkappa\lambda),$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial H(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\,\frac{\partial H(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}\right) = Q(\varkappa\lambda)$$

die übersichtliche Gestalt an:

$$(7.)\qquad \Omega^2 = \psi^3+3\psi H(\varphi,-f)+Q(\varphi,-f)\,^{*)}.$$

Für $f(xx)=0$ ist aber:

$$H(\varphi,-f)=\varphi^2 H(1,0)=\varphi^2.h,$$
$$Q(\varphi,-f)=\varphi^3 Q(1,0)=\varphi^3.q,$$
$$\Omega^2 = \psi^3+3h\psi\varphi^2+q\varphi^3,$$

und daher

$$dJ = \frac{(\Sigma\pm\alpha_1 x_2 dx_3)\Omega}{f(\alpha x)\sqrt{\varphi(\psi^3+3h\psi\varphi^2+q\varphi^3)}},$$

oder, da nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten und nach (5.) der Zähler des Quotienten rechter Hand gleich $\frac{1}{2}f(\alpha x)(\varphi d\psi-\psi d\varphi)$:

$$(8.)\qquad dJ=\frac{ds}{\sqrt{4s^3+12hs+4q}},\quad s=\frac{\psi}{\varphi}.$$

Man kann das Integral von dJ noch in anderer Weise auf die Normalform zurückführen, indem man die Substitution anwendet:

$$(9.)\qquad \mu = -\frac{\varphi(ax)}{f(ax)}$$

und dabei unter a_1, a_2, a_3 die Coordinaten irgend eines der Schnittpunkte von $f=0$ mit $\varphi=0$ versteht. Nimmt man für die völlig willkürlichen Grössen α_i in dJ die Werthe an

$$4\alpha_1=f'(a_2)\varphi'(a_3)-f'(a_3)\varphi'(a_2)\ldots 4\alpha_3=f'(a_1)\varphi'(a_2)-f'(a_2)\varphi'(a_1),$$

setzt also die α_i den a_i proportional, so wird das Product aus den Gleichungen der drei Geraden, welche den Schnittpunkt α_1, α_2, α_3 mit den drei übrigen verbinden, nach einer von *Joachimsthal* gelehrten Methode von der Form:

$$f(\alpha x)\varphi(xx)-f(xx)\varphi(\alpha x) = 0.$$

---

*) Ueber diese Formel und die geometrische Bedeutung von ψ vergl. man: Zeitschrift für Math. und Physik, 20. Jahrgang pp. 153—159.

Dieselben drei Geraden können aber auch als die Tangenten des Punktes $(a_1 a_2 a_3)$ an die drei Geradenpaare des Büschels $\varkappa f + \lambda \varphi = 0$ betrachtet und somit analytisch repräsentirt werden durch:

$$G(\varphi(a x),\ -f(a x)) = 0.$$

Die Vergleichung der beiden letzten Relationen lehrt, dass eine Identität der Gestalt besteht:

$$f(\alpha x).(f(\alpha x)\varphi(x x),\ -f(x x)\varphi(\alpha x)) = M.f(a x).G(\varphi(a x),\ -f(a x)),$$

worin M offenbar eine rein numerische Constante und an irgend einem speciellen Beispiele gleich Eins gefunden wird. Mit Rücksicht auf die letzte Identität und diese andere:

$$\Sigma \pm \alpha_1 x_2 dx_3 = f(a x)\, d\varphi(a x) - \varphi(a x)\, df(a x)$$

erhält man demnach unter Vermittelung von (9.) wegen $f(x x) = 0$:

$$dJ = \frac{f(ax)d\varphi(ax) - \varphi(ax)df(ax)}{\sqrt{f(ax).G(\varphi(ax), -f(ax))}} = \frac{d\mu}{\sqrt{G(\mu, 1)}},$$

eine Darstellung von dJ, welche sofort durch eine bekannte elementare Transformation in die Gestalt (8.) übergeführt werden kann.

Die beiden hier mitgetheilten Reductionen sind in gewissem Sinne die Analoga zu denjenigen, welche die Herren *Aronhold* und *Brioschi* für das bei den Curven dritter Ordnung auftretende Integral erster Gattung kennen gelehrt haben.

Tübingen, Ende Januar 1877.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von den Herren *Frobenius* und *Stickelberger* in Zürich.)

Die merkwürdige Formel, welche Herr *Hermite* in einer kürzlich erschienenen Notiz über elliptische Functionen mitgetheilt hat (dieses Journal Bd. 82, S. 343), veranlasst uns, auf den Zusammenhang zwischen einigen verwandten Formeln hinzuweisen. Um von der allgemeinen Gleichung, von der wir ausgehen, zu der specielleren des Herrn *Hermite* und von da zu der noch specielleren zu gelangen, welche Herr *Kiepert* *) seiner Lösung des Multiplicationsproblems zu Grunde gelegt hat, bedienen wir uns eines Grenzüberganges, den wir zunächst allgemein darstellen wollen.

Seien

$$f_0(u),\quad f_1(u),\quad \dots\ f_n(u)$$

$n+1$ nach ganzen positiven Potenzen von u geordnete convergente Reihen und

$$u_0,\quad u_1,\quad \dots\ u_n$$

irgend welche Werthe innerhalb ihres gemeinsamen Convergenzbereiches. Dann kann die Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$|f_\alpha(u_\beta)| = F(u_0, u_1, \dots u_n)$$

in eine nach Potenzen von $u_0, u_1, \dots u_n$ fortschreitende convergente Reihe entwickelt und diese als alternirende Function auf die Form

$$F = G(u_0, u_1, \dots u_n)\Pi(u_\alpha - u_\beta)$$

gebracht werden, wo die symmetrische Function G ebenfalls eine nach ***positiven*** Potenzen von $u_0, u_1, \dots u_n$ fortschreitende convergente Reihe ist. (In dem Differenzenproducte sollen hier und im Folgenden α und β die Paare der Zahlen $0, 1, \dots n$ so durchlaufen, dass $\alpha > \beta$ ist.) Dann lässt sich der Werth, den die Function $G(u_0, u_1, \dots u_n)$ annimmt, wenn die

---

*) *Kiepert*, Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen, dieses Journal Bd. 76, S. 21. Daselbst findet man die Definition der Functionen $\sigma(u)$ und $\wp(u)$, welche Herr *Weierstrass* in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführt hat, sowie eine kurze Zusammenstellung ihrer wichtigsten Eigenschaften. Betreffs der Formeln und Sätze aus dieser Theorie die wir im Folgenden gebrauchen werden, verweisen wir daher auf jene Abhandlung.

$n+1$ Variabeln alle gleich u gesetzt werden, leicht in Form einer Determinante angeben. Setzt man der Einfachheit halber, unter h eine kleine Grösse verstehend,

$$u_\beta = u+\beta h, \quad (\beta = 0, 1, \dots n)$$

und bedient man sich der Bezeichnung

$$\Delta f(u) = f(u+h)-f(u),$$

so ist nach einem bekannten Determinantensatze

$$|f_\alpha(u_\beta)| = |\Delta^\beta f_\alpha(u)|$$

und folglich

$$G = \frac{F}{\Pi(u_\alpha - u_\beta)} = \frac{1}{\Pi(\alpha-\beta)}\left|\frac{\Delta^\beta f_\alpha(u)}{h^\beta}\right|.$$

Daraus erhält man, indem man h sich der Grenze 0 nähern lässt, die gesuchte Relation

$$(1.) \qquad \lim \frac{F(u_0, u_1, \dots u_n)}{\Pi(u_\alpha - u_\beta)} = \frac{1}{\Pi(\alpha-\beta)}\,|f_\alpha^{(\beta)}(u)|.$$

Auf der linken Seite sollen hier erst, nachdem der Quotient in eine nach positiven Potenzen von u_0, u_1, ... u_n fortschreitende Reihe entwickelt ist, die Argumente alle gleich u gesetzt werden.

Ein ähnliches Verfahren wenden wir jetzt auf die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \psi(u_0+v_0) & \dots & \psi(u_0+v_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \psi(u_n+v_0) & \dots & \psi(u_n+v_n) \end{vmatrix},$$

an, wo

$$\psi(u) = \frac{d\log\sigma(u)}{du}$$

ist. Die Differenz $\psi(u+v)-\psi(u)$ ist eine doppelt periodische Function von u. Indem man daher die Elemente der ersten Zeile von R, mit $\psi(u_0)$ multiplicirt, von denen der zweiten Zeile subtrahirt, erkennt man, dass diese Determinante eine doppelt periodische Function von u_0 ist. Da sich der nämliche Schluss auf die übrigen in R eingehenden Variabeln anwenden lässt, so hat also diese Function von $2n+2$ Argumenten die merkwürdige Eigenschaft in Bezug auf jedes derselben doppelt periodisch zu sein.

Die Function $\psi(u)$ wird nur für $u=0$ (und die congruenten Werthe) unendlich, und ihre Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von u be-

ginnt mit $\frac{1}{u}$. Als Function von u_0 betrachtet, wird daher R nur für die $n+1$ Werthe

$$u_0 = -v_0, \quad -v_1, \quad \dots \quad -v_n$$

und die congruenten unendlich gross von der ersten Ordnung. Dagegen verschwindet R offenbar für

$$u_0 = u_1, \quad \dots \quad u_n.$$

Nun wird aber eine elliptische Function *) für eben so viele Werthe Null wie unendlich, und es ist (nach dem *Abel*schen Theorem) die Summe der Werthe, für welche sie verschwindet, ~~der~~ Summe der Werthe, für welche sie unendlich wird, congruent. (*Briot* et *Bouquet*, Fonctions elliptiques, II. éd., p. 241, Théor. III; p. 242, Théor. V. *Kiepert*, l. c. S. 24 u. 25.) Folglich muss R noch für einen $(n+1)^{\text{ten}}$ Werth von u_0 verschwinden, der aus der Gleichung

$$u_0+v_0+\dots+u_n+v_n = 0$$

zu berechnen ist. Nach einem bekannten Satze (*Briot* et *Bouquet*, p. 242, Théor. IV; p. 243, Théor. VI. *Kiepert*, l. c.) ist daher jene Determinante bis auf einen von u_0 unabhängigen Factor gleich

$$\frac{\sigma(u_0+v_0+\dots+u_n+v_n)\sigma(u_1-u_0)\sigma(u_2-u_0)\dots\sigma(u_n-u_0)}{\sigma(u_0+v_0)\sigma(u_0+v_1)\dots\sigma(u_0+v_n)}.$$

Untersucht man in ähnlicher Weise ihre Abhängigkeit von den übrigen $2n+1$ Argumenten, so ergiebt sich **) bis auf einen constanten Factor

$$(2.)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{\sigma'(u_0+v_0)}{\sigma(u_0+v_0)} & \dots & \frac{\sigma'(u_0+v_n)}{\sigma(u_0+v_n)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \frac{\sigma'(u_n+v_0)}{\sigma(u_n+v_0)} & \dots & \frac{\sigma'(u_n+v_n)}{\sigma(u_n+v_n)} \end{vmatrix} \\ & = \frac{\sigma(u_0+v_0+\dots+u_n+v_n)\,\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\,\Pi\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}. \end{aligned} \right.$$

Im Nenner der rechten Seite ist das Product auf alle Paare der Zahlen von 0 bis n zu erstrecken, im Zähler nur auf solche, für welche $\alpha > \beta$ ist.

---

*) *Elliptische Function* nennen wir nach Herrn *Weierstrass* jede doppelt periodische Function, welche im Endlichen überall den Charakter einer rationalen hat, d. h. in der Umgebung jedes endlichen Werthes a in eine nach ganzen Potenzen von $u-a$ geordnete convergente Reihe entwickelt werden kann, die negative Potenzen nur in endlicher Anzahl enthält.

**) Für $n = 1$ stimmt diese Formel im wesentlichen mit derjenigen überein, welche *Jacobi* im 15. Bande dieses Journals (S. 204, 13) angegeben hat.

Dass der constante Factor in der Gleichung (2.) richtig angegeben ist, sieht man ohne weiteres für $n=0$, und allgemein leicht durch den Schluss von n auf $n+1$. Multiplicirt man nämlich auf der linken Seite die Elemente der letzten Zeile mit u_n+v_n und setzt dann $u_n=-v_n$, so verschwinden sie mit Ausnahme des letzten, welches gleich 1 wird. Daher geht R in die analog aus den n Argumentenpaaren u_0, v_0, ... u_{n-1}, v_{n-1} gebildete Determinante über. In dem Ausdrucke auf der rechten Seite der Gleichung (1.) ist für $u_n=-v_n$

$$\lim \frac{u_n+v_n}{\sigma(u_n+v_n)} = 1,$$

$$\frac{\sigma(u_n-u_\beta)\sigma(v_n-v_\beta)}{\sigma(v_n+u_\beta)\sigma(u_n+v_\beta)} = 1 \quad (\beta=0,1,\dots n-1).$$

Derselbe geht also ebenfalls in die analog aus den n Argumentenpaaren u_0, v_0, ... u_{n-1}, v_{n-1} gebildete Function über.

In der Gleichung (2.) setzen wir jetzt

$$v_\beta = \beta h \quad (\beta = 0, 1, \dots n)$$

und formen ihre linke Seite nach der schon oben angewendeten Methode in eine Determinante um, deren $(\alpha+2)^{\text{te}}$ Zeile die Elemente

$$1, \quad \psi(u_\alpha), \quad \Delta\psi(u_\alpha), \quad \Delta^2\psi(u_\alpha), \quad \dots \quad \Delta^n\psi(u_\alpha)$$

enthält. Da bei dieser Transformation die Elemente der ersten Zeile

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad \dots \quad 0$$

werden, so reducirt sich die linke Seite auf eine Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, die wir in leicht verständlicher Weise mit

$$-R = |1, \quad \Delta\psi(u_\alpha), \quad \Delta^2\psi(u_\alpha), \quad \dots \quad \Delta^n\psi(u_\alpha)|$$

bezeichnen. Folglich ist

$$\left|1, \quad \frac{\Delta\psi(u_\alpha)}{h}, \quad \frac{\Delta^2\psi(u_\alpha)}{h^2}, \quad \dots \quad \frac{\Delta^n\psi(u_\alpha)}{h^n}\right|$$
$$= \frac{\sigma(u_0+v_0+\dots+u_n+v_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}\,\Pi\frac{\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{h},$$

also, wenn h sich der Grenze Null nähert,

$$|1, \quad \psi'(u_\alpha), \quad \psi''(u_\alpha), \quad \dots \quad \psi^{(n)}(u_\alpha)| = \frac{\sigma(u_0+\dots+u_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\Pi(\alpha-\beta)}{(\Pi\sigma(u_\alpha))^{n+1}}.$$

Setzt man nach Herrn *Weierstrass*

$$-\psi'(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = \wp(u),$$

so lautet diese Formel

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_0) & \wp'(u_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n \Pi(\alpha-\beta)\sigma(u_0+\cdots+u_n)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)}{(\Pi\sigma(u_\alpha))^{n+1}}.$$

Dies ist im wesentlichen die von Herrn *Hermite* in dem oben citirten Schreiben angegebene Gleichung. Auf dieselbe wenden wir jetzt noch einmal den im Eingang auseinandergesetzten Grenzübergang an, indem wir in der Formel (1.)

$$f_0(u)=1,\quad f_1(u)=\wp(u),\quad \dots\quad f_n(u)=\wp^{(n-1)}(u)$$

wählen. Dann verschwinden in der Determinante $|f_\alpha^{(\beta)}(u)|$ die Elemente der ersten Colonne mit Ausnahme des ersten, und sie reducirt sich auf eine Determinante n^{ten} Grades. Man gelangt daher zu der Formel des Herrn *Kiepert* (l. c. S. 31, Formel (29^a.))

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \dots & \wp^{(n)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \dots & \wp^{(n+1)}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \wp^{(n)}(u) & \wp^{(n+1)}(u) & \dots & \wp^{(2n-1)}(u) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n(\Pi(\alpha-\beta))^2\sigma((n+1)u)}{\sigma(u)^{(n+1)(n+1)}}.$$

Zürich, den 10. März 1877.

Ueber das grösste Tetraeder mit Flächen von gegebenen Inhalten.

(Von Herrn *Mertens* in Krakau.)

Den Zweck der folgenden Zeilen bilden einige vervollständigende Bemerkungen über die *Lagrange*sche*) Bestimmung des grössten Tetraeders, dessen Flächen gegebene Inhalte haben sollen.

Es seien A, B, C, D die für die Inhalte der Flächen vorgeschriebenen Werthe, von welchen selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass sie die für die Realisirbarkeit eines Tetraeders nothwendige Bedingung

$$P = (-A+B+C+D)(A-B+C+D)(A+B-C+D)(A+B+C-D) > 0$$

erfüllen; es seien ferner p, q, r die Kanten des gesuchten Tetraeders, in welchen sich die Flächen B und C, C und A, A und B beziehungsweise schneiden, a, b, c die Winkel zwischen den Kanten q und r, r und p, p und q, ξ, η, ζ die Cosinus der Flächenwinkel zwischen den Flächen B und C, C und A, A und B, $\mathfrak{R}$ der Rauminhalt und zur Abkürzung

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c = S,$$

$$A^2+B^2+C^2-D^2 = 2g,$$

$$(s+A^2)(s+B^2)(s+C^2) = fs.$$

Man hat dann die Gleichungen

$$36\mathfrak{R}^2 = p^2q^2r^2S,$$

$$p^2q^2r^2 = \frac{8ABC}{\sin a\sin b\sin c},$$

$$(1.)\qquad \frac{\xi}{A}+\frac{\eta}{B}+\frac{\zeta}{C} = \frac{g}{ABC},$$

und da aus der sphärischen Trigonometrie die Formel

$$S^2 = \sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c(1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2-2\xi\eta\zeta)$$

bekannt ist, so ergiebt sich

$$(2.)\qquad \frac{81\mathfrak{R}^4}{4A^2B^2C^2} = 1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2-2\xi\eta\zeta.$$

---

*) Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. Vergl. *Borchardt* Berl. Acad. 1865 und 1866, *Lebesgue* Comptes rendus t. 66, *Kronecker* und *Borchardt* Berl. Monatsberichte 1872; *Baltzer* Determ. 4. Aufl.

Die Gleichungen (1.) und (2.) sind, abgesehen von der Bezeichnung, dieselben, von welchen *Lagrange* ausgeht, und führen die Aufgabe darauf zurück, das Maximum des Ausdrucks

$$\mathfrak{A} = 1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2-2\xi\eta\zeta$$

der drei Veränderlichen ξ, η, ζ unter der Bedingung (1.) zu bestimmen.

Zu diesem Ende hat man

$$\tfrac{1}{2}d\mathfrak{A} = -(\xi+\eta\zeta)d\xi-(\eta+\zeta\xi)d\eta-(\zeta+\xi\eta)d\zeta = 0,$$

$$\frac{d\xi}{A}+\frac{d\eta}{B}+\frac{d\zeta}{C} = 0,$$

aus welchen Gleichungen

$$(3.)\qquad A(\xi+\eta\zeta) = B(\eta+\zeta\xi) = C(\zeta+\xi\eta)$$

folgt. Setzt man den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Ausdrücke

$$= \frac{tS}{\sin a \sin b \sin c},$$

so ergiebt sich

$$(4.)\qquad \begin{cases} \cot a = \dfrac{t}{A}, & \cot b = \dfrac{t}{B}, & \cot c = \dfrac{t}{C}, \\ \cos a = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+A^2}}, & \cos b = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+B^2}}, & \cos c = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+C^2}}, \\ \sin a = \dfrac{A}{\sqrt{t^2+A^2}}, & \sin b = \dfrac{B}{\sqrt{t^2+B^2}}, & \sin c = \dfrac{C}{\sqrt{t^2+C^2}}. \end{cases}$$

$$(5.)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c} = \dfrac{t\sqrt{ft^2}}{BC(t^2+A^2)}-\dfrac{t^2}{BC}, \\ \eta = \dfrac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a} = \dfrac{t\sqrt{ft^2}}{CA(t^2+B^2)}-\dfrac{t^2}{CA}, \\ \zeta = \dfrac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b} = \dfrac{t\sqrt{ft^2}}{AB(t^2+C^2)}-\dfrac{t^2}{AB} \end{cases}$$

und mit Hülfe dieser in die Gleichung (1.) einzusetzenden Werthe zur Bestimmung von t die Gleichung

$$(6.)\qquad tf't^2 = (g+3t^2)\sqrt{ft^2}$$

oder,

$$(7.)\qquad t^2(f't^2)^2-(g+3t^2)^2ft^2 = F(t^2)$$

gesetzt, in rationaler Form

$$(8.)\qquad Ft^2 = 3D^2t^8+\cdots = 0.$$

Um diese Gleichung, welche in Bezug auf t^2 vom vierten Grade ist, hinsichtlich ihrer Wurzeln näher zu untersuchen, seien w', w'' die beiden Wurzeln der Gleichung

$$f's = 0,$$

von denen die (algebraisch) kleinere w'' zwischen den Grenzen $-A^2$ und $-B^2$, die grössere w' zwischen den Grenzen $-B^2$ und $-C^2$ liegt, wenn $A > B > C$ angenommen wird. Alsdann sind, wie aus (7.) hervorgeht, die Vorzeichen der Resultate

$$F(-\infty),\quad F(w''),\quad F(w'),\quad F(-C^2),\quad F(0),\quad F(\infty)$$

beziehungsweise

$$+,\qquad -,\qquad +,\qquad -,\qquad -,\qquad +.$$

Die Gleichung (8.) hat also drei negative und eine positive Wurzel. Hinsichtlich dieser letzteren, welche hier allein in Betracht kommt, da die negativen Wurzeln für t einen imaginären Werth ergeben, ist noch zu bemerken, dass dieselbe in dem Falle, wo g negativ ist, $< -\frac{1}{3}g$ sein muss, weil

$$F\left(-\frac{g}{3}\right) = -\frac{g}{3}\left(f'\left(-\frac{g}{3}\right)\right)^2 \geqq 0$$

ist, und dass dieselbe in dem Grenzfalle $g = 0$ verschwindet.

Versteht man nun unter t^2 die positive Wurzel der Gleichung (8.), so lässt sich zeigen, dass derselben immer ein reales Tetraeder entspricht und dass dasselbe ein Maximum ist.

Da man in den Gleichungen (4.) und (5.) die Quadratwurzeln positiv zu nehmen hat, so ist zunächst auf Grund der Gleichung (6.) das Zeichen von t so zu bestimmen, dass $t(g+3t^2)$ positiv ausfällt, also, weil nach der obigen Bemerkung $g+3t^2$ immer dasselbe Zeichen wie g hat, t mit dem Zeichen von g zu nehmen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass sich aus den in (4.) und (5.) gefundenen Winkeln eine dreiseitige Ecke bilden lasse, ist

$$S > 0.$$

Nun wird durch Einsetzung der Werthe (4.)

$$S = 1 - \frac{t^2 f' t^2}{f t^2} + \frac{2t^3}{\sqrt{f t^2}^{\,3}}$$

und mit Hülfe der Gleichung (6.)

$$S = 1 - \frac{t(g+t^2)}{\sqrt{f t^2}}.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $ft^2+t(g+t^2)\sqrt{ft^2}$, so ergiebt sich nach entsprechender Entwickelung

$$(9.)\quad \begin{cases} \{ft^2+t(g+t^2)\sqrt{ft^2}\}S = ft^2-t^2(g+t^2)^2 \\ \qquad = D^2t^4+\tfrac{1}{4}Qt^2+A^2B^2C^2, \end{cases}$$

wo

$$Q = -A^4-B^4-C^4-D^4+2B^2C^2+2C^2A^2+2A^2B^2+2A^2D^2+2B^2D^2+2C^2D^2$$

ist und leicht in die Form

$$P-8ABCD$$

gesetzt werden kann, so dass die rechte Seite der Gleichung (9.)

$$= (Dt^2-ABC)^2+\tfrac{1}{4}Pt^2$$

wird. Hiernach wird also

$$S = \frac{\tfrac{1}{4}Pt^2+(Dt^2-ABC)^2}{ft^2+t(g+t^2)\sqrt{ft^2}}$$

und in diesem Bruche sind Zähler und Nenner positiv, da

$$t(g+t^2) = \tfrac{1}{3}t(g+3t^2)+\tfrac{2}{3}tg$$

positiv ist.

Schneidet man nun auf den Kanten der genannten Ecke die Längen

$$p = \sqrt{\frac{2\sqrt{ft^2}}{t^2+A^2}},\quad q = \sqrt{\frac{2\sqrt{ft^2}}{t^2+B^2}},\quad r = \sqrt{\frac{2\sqrt{ft^2}}{t^2+C^2}}$$

ab und verbindet deren Endpunkte, so hat das entstandene Tetraeder auf Grund der Gleichungen (5.) und (1.) Flächen mit den gewünschten Inhalten.

Dass in der That ein Maximum vorliegt, folgt aus der Formel

$$\tfrac{1}{2}d^2\mathfrak{A} = -(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+2\xi\, d\eta\, d\zeta+2\eta\, d\zeta\, d\xi+2\zeta\, d\xi\, d\eta),$$

welche sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.), (3.) unmittelbar ergiebt, und aus dem Umstande, dass die Form

$$x^2+y^2+z^2+2\xi yz+2\eta zx+2\zeta xy$$

eine positive forma definita ist; dieselbe drückt nämlich in einem Coordinatensystem, dessen Axen mit einander Winkel mit den Cosinus ξ, η, ζ bilden, das Quadrat der Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfangspunkte aus.

Krakau, den 20. November 1876.

Ueber einen das elastische Gleichgewicht betreffenden Satz.

(Von Herrn *H. Aron.*)

Für das Gleichgewicht freier homogener isotroper elastischer Körper bestehen drei Gleichungen für das Innere und drei Gleichungen für die Oberfläche, von welchen je eine als Repräsentantin angeführt werden möge:

$$(1.)\qquad X+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\quad \text{etc.}$$

$$(2.)\qquad X_n = X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z),\quad \text{etc.}$$

Hier haben die sechs elastischen Spannungen X_x etc. nach der *Kirchhoff*schen Bezeichnung die folgenden Werthe, von welchen ebenfalls nur zwei als Repräsentanten angeführt werden sollen:

$$(3.)\qquad X_x = 2K\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\theta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)\Big),\quad \text{etc.}$$

$$(4.)\qquad Y_z = Z_y = K\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big),\quad \text{etc.}$$

Setzt man hierin

$$Ku = U,\quad Kv = V,\quad Kw = W,$$

so werden die elastischen Spannungen $X_x \dots Y_z = Z_y \dots$ Ausdrücke in U, V, W, welche nur von θ und nicht von K abhangen. Setzt man diese Ausdrücke für $X_x \dots Y_z = Z_y \dots$ in die Gleichungen (1.), (2.) ein, so werden dieselben Differentialgleichungen für U, V, W, welche K nicht enthalten. Daher sind U, V, W und $X_x \dots Y_z = Z_y \dots$ von K unabhängig. Man hat also den Satz: *In allen Aufgaben des elastischen Gleichgewichts freier homogener isotroper Körper sind die Spannkräfte nur von der einen Constante θ der Elasticität abhängig.* Die zweite Constante K tritt erst für die Verschiebungen auf, welche $\frac{1}{K}$ proportional sind. Dasselbe gilt, wenn der Körper nicht frei ist, sondern an beliebigen Stellen befestigt ist oder fest aufliegt, weil die Bedingungsgleichungen dafür, in U, V, W umgeformt, K nicht enthalten.

Berlin, im März 1877.

Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte.

(Von Herrn *Hamburger*.)

Es sei eine mehrdeutige Function $f(x)$ überall in der x-Ebene mit Ausnahme gewisser singulärer Punkte (Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte) endlich und stetig und in allen Gebieten, die keinen singulären Punkt einschliessen, eindeutig; dann giebt es für jeden nicht singulären Punkt x_0 eine innerhalb seiner Umgebung convergente nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Entwickelung von $f(x)$. Ist eine solche Entwickelung gegeben, oder, was bei den hier gemachten Voraussetzungen dasselbe ist, sind die Werthe der Function $f(x)$ nebst allen ihren Ableitungen bis ins Unendliche in einem Punkte x_0 bekannt, so kann man durch eine Reihenfolge von Entwickelungen, die innerhalb einzelner Abschnitte gültig sind, den Werth der Function in einem beliebigen Endpunkte x_1, der ebenfalls nicht singulär ist, eindeutig bestimmen, wenn der durch keinen singulären Punkt von x_0 zu x_1 führende Weg in der x-Ebene vorgeschrieben ist. Herr *Fuchs**) hat neuerdings eine allgemeine Methode angegeben, diese Fortsetzung der Function von x_0 zu x_1 zu bewirken, ohne dass man nöthig hat, die Functionswerthe für die Zwischenpunkte zu berechnen, falls nur das Verhalten der Function in der Umgebung der singulären Punkte bekannt ist. Wir beabsichtigen, im Folgenden zu zeigen, dass auch das Verhalten der Function in der Umgebung der singulären Punkte stets ermittelt werden kann, falls

1) die Lage der singulären Punkte selbst in der x-Ebene bekannt ist,

2) die Werthe der Function und aller ihrer Ableitungen in einem Punkte der Umgebung des jedesmal betrachteten singulären Punktes gegeben sind.

Beide Voraussetzungen sind erfüllt bei den Functionen, die durch

---

*) Dieses Journal Bd. 75, p. 177 ff.

lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung definirt sind, deren Coefficienten ein- oder mehrdeutige Functionen von x sind, und zwar sind die singulären Punkte der Integralfunctionen ausser dem Unendlichkeitspunkte die Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte der Coefficienten der Differentialgleichung, wenn der höchste Differentialquotient die Einheit zum Coefficienten hat.

Dagegen ist bei den Functionen, welche Differentialgleichungen von höherem als dem ersten Grade genügen, zwar die zweite Voraussetzung erfüllt, nicht aber die erste, da die Lage der singulären Punkte von den in den allgemeinen Integralen enthaltenen Constanten in einer uns a priori nicht bekannten Weise abhängt. Giebt nämlich n die Ordnung der Differentialgleichung an, und wählen wir in einem Punkte x_0, der im Allgemeinen beliebig sein kann, die Anfangswerthe der Function y und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen beliebig, jedoch so, dass alle folgenden Ableitungen aus der gegebenen Differentialgleichung sich in endlichen Werthen bestimmen, so hängt die Lage der singulären Punkte in der x-Ebene wenigstens zu einem Theile von den gewählten Anfangswerthen selbst ab, daher denn auch der Convergenzbereich der in der Umgebung von x_0 gültigen Entwickelung von den angenommenen Anfangswerthen abhängig ist.

So sind z. B. für die durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = y^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ definirte Function y ausser dem Punkte $x = 0$ die Wurzeln der Gleichung $x+\log x = 1+\frac{1}{\alpha}$ singuläre Werthe, wenn $x=1$, $y=\alpha$ als entsprechende Anfangswerthe genommen werden, denn das Integral ist alsdann

$$y = \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}-x-\log x}.$$

Ebenso giebt die Gleichung $\frac{dy}{dx} = y^2+1$ mit der Bestimmung, dass für $x=0$ $y=a=\mathrm{tg}\,\alpha$ sei, für die Function y als singuläre Punkte $x = \frac{2n+1}{2}\pi-\alpha$ (n eine beliebige ganze Zahl), denn das Integral lautet unter dieser Anfangsbedingung $y = \mathrm{tg}\,(x+\alpha)$.

§. 1.

Indem wir nun die Voraussetzung machen, dass die Lage der singulären Punkte in der x-Ebene für die mehrdeutige Function $y = f(x)$ be-

kannt sei, möge der Nullpunkt als einer derselben angenommen werden. Die übrigen singulären Punkte im Endlichen seien bezeichnet durch

$$\varrho_1 e^{\varphi_1 i}, \quad \varrho_2 e^{\varphi_2 i}, \quad \ldots \quad \varrho_m e^{\varphi_m i}$$

mit der Bestimmung, dass, wenn $\alpha < \beta$, $\varrho_\alpha \leqq \varrho_\beta$ ist und die φ zwischen den Grenzen 0 und 2π angenommen sind. x_0 sei ein Punkt in der Umgebung des Nullpunktes und zwar gelte für den absoluten Betrag des Werthes x_0, den wir nach Herrn *Weierstrass* mit $|x_0|$ bezeichnen, die Bedingung

$$0 < |x_0| < \varrho_1 e^{-2\pi}.$$

Die Werthe der Function y nebst ihren sämmtlichen Ableitungen in inf. für $x = x_0$ nehmen wir als gegeben an.

Wir führen nunmehr die Substitution $x = e^z$ ein; dann entspricht jedem Punkte der z-Ebene ein einziger Punkt der x-Ebene, jedem Punkte der letzteren aber entspricht in der z-Ebene eine unendliche Schaar von Punkten, welche, in einer zur imaginären Axe in der z-Ebene parallelen Geraden liegend, um die constante Strecke 2π von einander entfernt sind.

Bedeuten $\sigma_1 \ldots \sigma_m$ die reellen Werthe beziehlich von $\log \varrho_1 \ldots \log \varrho_m$, dann ist

$$\sigma_\alpha \lesseqgtr 0, \quad \text{je nachdem} \quad \varrho_\alpha \lesseqgtr 1 \quad \text{und}$$

$$\sigma_\alpha \leqq \sigma_\beta, \quad \text{wenn} \quad \alpha \leqq \beta.$$

Legt man nun durch die auf der reellen Axe der z-Ebene liegenden, in der Richtung von der negativen nach der positiven Seite auf einander folgenden Punkte $\sigma_1 \ldots \sigma_m$ zur imaginären Axe parallele Gerade, welche mit $A_1 \ldots A_m$ bezeichnet sein mögen, so enthalten diese Geraden alle singulären Punkte für y als Function von z betrachtet, und zwar sind die auf A_α befindlichen repräsentirt durch

$$z = \sigma_\alpha + \varphi_\alpha i + 2\varkappa\pi i,$$

wo $\varkappa$ jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt. Fallen in A_α mehrere Grade etwa λ zusammen, was eintritt, wenn $\varrho_\alpha = \varrho_{\alpha+1} = \cdots = \varrho_{\alpha+\lambda-1}$, also $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+1} = \cdots = \sigma_{\alpha+\lambda-1}$ ist, dann befinden sich λ Schaaren von singulären Punkten auf A_α dargestellt durch

$$z = \sigma_\alpha + \varphi_\alpha i, \quad \ldots \quad z = \sigma_\alpha + \varphi_{\alpha+\lambda-1} i,$$

abgesehen von hinzuzufügenden ganzen Vielfachen von $2\pi i$.

In allen übrigen Punkten der z-Ebene ausser den genannten und dem Unendlichkeitspunkte ist y endlich und stetig.

Es sei nun z_0 ein Punkt der z-Ebene aus der Punktreihe, welche dem Punkte x_0 der x-Ebene entspricht, so dass $x_0 = e^{z_0}$; alsdann wird, da $|x_0| < \varrho_1 e^{-2\pi}$ vorausgesetzt ist, der reelle Theil der Grösse z_0, deren verschiedene Werthe sich nur um ganze Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden, kleiner sein als $\sigma_1 - 2\pi$. Sein Werth sei $\sigma_1 - 2\pi - \varepsilon$, wo ε eine positive Grösse bedeutet. Die der imaginären Axe der z-Ebene parallele Gerade, welche alle x_0 entsprechenden Punkte enthält, liegt mithin auf der negativen Seite der Geraden A_1 und ist von ihr um eine Strecke entfernt, deren Betrag grösser als 2π ist. Ein Kreis um den Punkt z_0 mit einem Radius $R = 2\pi + \vartheta$ beschrieben, wo ϑ positiv und beliebig wenig kleiner als ε ist, schneidet demnach keine der Geraden A und schliesst folglich auch keinen der singulären Punkte der z-Ebene ein.

Die Function $y = f(e^z)$ lässt sich daher in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe entwickeln, die innerhalb des Kreises R, also auch noch für $z - z_0 = 2\pi i$ convergirt. Die Coefficienten der Potenzen von $z - z_0$ sind aus den Grössen

$$y_0, \quad x_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad x_0^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \quad \text{u. s. f.,}$$

welche die als bekannt angenommenen Werthe der Grössen

$$y, \quad x\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{u. s. f.}$$

für $x = x_0$ bezeichnen, durch Multiplication mit Zahlencoefficienten und Addition zusammengesetzt. Denn es ist *)

$$\frac{d^\nu f(e^z)}{dz^\nu} = E_1^\nu e^z f'(e^z) + E_2^\nu \frac{e^{2z} f''(e^z)}{1.2} + \cdots + E_\nu^\nu \frac{e^{\nu z} f^{(\nu)}(e^z)}{\nu!},$$

wo $f^{(\varkappa)}(e^z)$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung von f nach e^z genommen bedeutet, und

$$E_\varkappa^\nu = \varkappa^\nu - \varkappa(\varkappa-1)^\nu + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}(\varkappa-2)^\nu - \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1.2.3}(\varkappa-3)^\nu + \text{etc.} = [\Delta^\varkappa x^\nu]_{x=0} \text{**}),$$

wenn $\Delta x^\nu = (x+1)^\nu - x^\nu$ und $\Delta^\varkappa x^\nu$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Differenz von x^ν mit dem Increment Eins bezeichnet. Folglich

*) *Hoppe*, Theorie der höheren Differentialquotienten. Leipzig 1845. *Schlömilch*, Compendium der höheren Analysis II, p. 5.

**) Die Grössen $E_\varkappa^\nu$ können übrigens auch durch die Identität definirt werden:

$$r^\nu = E_\nu^\nu \frac{r(r-1)\ldots(r-\nu+1)}{1.2\ldots\nu} + E_{\nu-1}^\nu \frac{r(r-1)\ldots(r-\nu+2)}{1.2\ldots\nu-1} + \cdots + E_2^\nu \frac{r(r-1)}{1.2} + E_1^\nu r.$$

$$(1.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^\nu y}{dz^\nu}\right)_{z=z_0} = (\Delta x^\nu)_{x=0}\, x_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \\ + (\Delta^2 x^\nu)_{x=0} \frac{x_0^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0}{1.2} + \cdots + (\Delta^\nu x^\nu)_{x=0} \frac{x_0^\nu \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right)_0}{\nu!}, \end{cases}$$

wobei wir bemerken, dass der erste und letzte Zahlencoefficient gleich Eins ist. Die Coefficienten der Reihe

$$(2.)\quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=z_0}(z-z_0) + \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)_0 \frac{(z-z_0)^2}{1.2} + \text{ etc.},$$

wo $\left(\frac{d^\varkappa y}{dz^\varkappa}\right)_0$ den Werth von $\frac{d^\varkappa y}{dz^\varkappa}$ für $z = z_0$ bezeichnet, sind sonach als gegeben anzusehen.

Die Gültigkeit der Reihe (1.) erstreckt sich nach dem Obigen noch bis zu dem Werthe $z = z_0 + 2\pi i$. Nun entspricht jedem im Endlichen verbleibenden Wege in der z-Ebene, der von z_0 zu dem Punkte $z_0 + 2\pi i$ führt, ohne die Gerade A_1, also auch ohne irgend eine der Geraden A überhaupt zu schneiden, ein Weg in der x-Ebene, der von x_0 ausgehend nach einem positiven Umlaufe um den Nullpunkt zu x_0 zurückführt, ohne einen der übrigen singulären Punkte der x-Ebene einzuschliessen, wobei dem geraden Wege von z_0 nach $z_0 + 2\pi i$ ein Kreisumlauf mit dem Radius $|x_0|$ in der x-Ebene entspricht.

Die Reihe (2.) giebt daher für $z = z_0 + 2\pi i$ denjenigen Werth, den y im Punkte x_0 nach einem einmaligen, keinen der übrigen singulären Punkte einschliessenden positiven Umlauf um den Nullpunkt der x-Ebene annimmt.

Bezeichnet man diesen Werth zum Unterschiede von dem Anfangswerthe y_0 mit $\bar{y}_0$, so erhält man

$$(3.)\quad \bar{y}_0 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \left(\frac{d^\varkappa y}{dz^\varkappa}\right)_0 \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}.$$

Da ferner die aus (2.) durch wiederholte totale Differentiationen nach z entstehenden Reihen in demselben Bereiche wie die ursprüngliche Reihe gültig sind, so erhält man durch die Substitution $z - z_0 = 2\pi i$ in dieselben ebenso:

$$(4.)\quad \overline{\left(\frac{dy}{dz}\right)_0} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \left(\frac{d^{\varkappa+1} y}{dz^{\varkappa+1}}\right)_0 \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}, \quad \ldots \quad \overline{\left(\frac{d^n y}{dz^n}\right)_0} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \left(\frac{d^{\varkappa+n} y}{dz^{\varkappa+n}}\right)_0 \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}, \quad \ldots$$

Durch die Kenntniss der Werthe der sämmtlichen Ableitungen nach erfolgtem Umlauf von x ist auch die durch den Umlauf veränderte Function y,

die wir mit $\bar{y}$ bezeichnen wollen, gegeben. Man erhält übrigens auch unmittelbar aus (2.)

$$(5.) \quad \bar{y} = y_0 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 (z-z_0+2\pi i) + \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0 \frac{(z-z_0+2\pi i)^2}{1.2} + \text{ etc.},$$

welche Reihe nach dem Vorigen convergirt, wenn $|z-z_0+2\pi i| < 2\pi+\varepsilon$, also auch, da $|z-z_0+2\pi i| \leqq |z-z_0|+2\pi$, wenn $|z-z_0| < \varepsilon$ ist. Durch successive Differentiation dieser Reihe und Substituirung von $z = z_0$ in die abgeleiteten Reihen würde man die obigen Ausdrücke für

$$\overline{\left(\frac{dy}{dz}\right)_0}, \quad \overline{\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0}, \quad \ldots$$

wieder erhalten.

Ist die Lage des Punktes x_0 so angenommen, dass $\varepsilon > 2\pi$ und zwar $\varepsilon = 2(\mu-1)\pi+\varepsilon'$ $(\varepsilon' < 2\pi)$, so könnte man unmittelbar die Aenderung der Function y nach μ Umläufen erhalten; man brauchte hierzu nur in (5.) für $2\pi i$ überall $2\mu\pi i$ einzusetzen. Dies ist jedoch von keinem Belang, da man, sobald einmal das Verhalten der Function nach einem einmaligen Umlauf bekannt ist, durch Einsetzen der neuen Werthe für y_0, $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 \ldots$ in (3.) und (4.) die Werthänderungen der Function und ihrer Ableitungen auch nach einem zweimaligen Umlauf erhalten und dieses Verfahren beliebig oft fortsetzen kann.

Wir bemerken, dass die oben entwickelten Beziehungen zwischen den Werthen der Function und ihrer Ableitungen vor und nach einem die übrigen singulären Punkte ausschliessenden Umlauf um den Nullpunkt auch noch für das Verhalten der Function um den Unendlichkeitspunkt, d. h. bei einem sämmtliche singulären Punkte der x-Ebene umschliessenden Umlauf ihre Gültigkeit behalten, sofern nur x_0 so gewählt wird, dass

$$|x_0| > \varrho_m e^{2\pi}$$

(wobei wir daran erinnern, dass ϱ_m den Abstand des entferntesten singulären Punktes vom Nullpunkte bedeutet).

Wenn ferner der Abstand zweier auf einander folgenden Geraden A_β, $A_{\beta+1}$ in der z-Ebene grösser als 4π ist, also

$$\varrho_{\beta+1} : \varrho_\beta > e^{4\pi}$$

und man für x_0 einen solchen Punkt wählt, dass

$$\varrho_\beta e^{2\pi} < |x_0| < \varrho_{\beta+1} e^{-2\pi},$$

dann geben obige Entwickelungen die Beziehungen zwischen den Werthen der Function und ihrer Ableitungen in diesem Punkte vor und nach dem Umlauf längs einer geschlossenen Curve, welche die in den Abständen $\varrho_1 \dots \varrho_\beta$ vom Nullpunkte liegenden singulären Punkte ein- und die übrigen ausschliesst.

Die erwähnten Bedingungen für den absoluten Betrag von x_0 sind nothwendig für die Convergenz der anzuwendenden Reihen.

Führt man in der Reihe (2.) für z seinen Werth $\log x$ wieder ein, so erhält man die Entwickelung

$$(6.)\qquad y = y_0 + \left(\frac{dy}{d\log x}\right)_{x=x_0} \log\frac{x}{x_0} + \left(\frac{d^2 y}{(d\log x)^2}\right)_{x=x_0} \frac{\left(\log\frac{x}{x_0}\right)^2}{1.2} + \text{ etc.}$$

mit der Bestimmung, dass $\log\frac{x}{x_0}$ für $x = x_0$ mit dem Werthe Null beginnt. Liegt der Punkt x_0 in einer solchen Entfernung vom Nullpunkte, dass

$$|x_0| = \varrho_1 e^{-2\pi-\varepsilon}$$

ist (ε eine beliebige positive Grösse), so ist diese Entwickelung, der Nullpunkt sei singulär oder nicht, gültig für alle Punkte x, für welche der absolute Betrag von $\log\frac{x}{x_0}$

$$\left|\log\frac{x}{x_0}\right| < 2\pi + \varepsilon$$

ist, also jedenfalls innerhalb eines den Punkt x_0 enthaltenden Ringes, der von den beiden Kreisen um den Nullpunkt mit den Radien

$$|x_0|\, e^{-\sqrt{(2\pi+\varepsilon)^2-(2\pi)^2}} \quad \text{und} \quad |x_0|\, e^{+\sqrt{(2\pi+\varepsilon)^2-(2\pi)^2}}$$

begrenzt ist.

Von jedem Punkte der innerhalb des Ringes enthaltenen Strecke auf der vom Nullpunkte nach dem Punkte x_0 gezogenen Geraden $(0, x_0)$ und von einer gewissen stetigen Folge dieser Strecke benachbarter Punkte aus kann x einen vollen positiven oder negativen innerhalb des Ringes verbleibenden Umlauf machen, ohne dass die Gültigkeit der Reihe (6.) aufhört. Setzt man in derselben $x e^{2\pi i}$ statt x, so erhält man die Reihe

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{d\log x}\right)_{x=x_0} \left(\log\frac{x}{x_0} + 2\pi i\right) + \left(\frac{d^2 y}{(d\log x)^2}\right)_{x=x_0} \frac{\left(\log\frac{x}{x_0} + 2\pi i\right)^2}{1.2} + \text{ etc.},$$

welche convergent ist, so lange der absolute Betrag von $\log\frac{x}{x_0} < \varepsilon$ ist

(S. 190). Diese Bedingung bestimmt auch die eben erwähnte stetige Folge der der Geraden $(0, x_0)$ innerhalb des Ringes benachbarten Punkte, von denen aus unbeschadet der Gültigkeit der Reihe (6.) ein positiver oder negativer Umlauf gestattet ist. Dass, wenn $\varepsilon > 2\pi$ ist, die Gültigkeit der Reihe (6.) auch bei mehrmaligem Umlauf bestehen bleibt, ist bereits erwähnt.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, dass die Function y in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig ist. Alsdann gilt die Reihe (6.) innerhalb des betrachteten Ringes für beliebig viele Umläufe, indem die Summe der durch die Substitution $xe^{2\mu\pi i}$ für x in (6.) hinzukommenden Glieder wegen der Relation $\bar{y} = y$ identisch verschwindet. Da in diesem Falle innerhalb desselben Ringes die *Laurent*sche Reihe

$$y = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} a_x x^x$$

gilt, so können nunmehr die Coefficienten a_x, die durch das geschlossene Integral

$$a_x = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{y}{x^{x+1}}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+2\pi i} y\,x^{-x}\,dz$$

gegeben sind, durch convergirende Reihen dargestellt werden. Die Function yx^{-x} hat nämlich dieselben singulären Punkte wie y, folglich gilt die Reihe

$$yx^{-x} = (yx^{-x})_{x=x_0} + \left(\frac{d(yx^{-x})}{d\log x}\right)_{x=x_0}(z-z_0) + \quad \text{etc.}$$

in demselben Bereiche wie die Reihe (2.), und dasselbe gilt für das Integral der Reihe, dessen Grenzen z_0 und $z_0 + 2\pi i$ innerhalb jenes Bereiches liegen. Man erhält demnach:

$$(7.) \qquad a_x = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{d^\lambda(yx^{-x})}{(d\log x)^\lambda}\right)_{x=x_0}\frac{(2\pi i)^\lambda}{(\lambda+1)!}.$$

Die Convergenz dieser Reihen ist nur an die Bedingung gebunden, dass $0 < |x_0| < \varrho_1 e^{-2\pi}$ ist. Der Werth derselben muss jedoch von x_0 unabhängig sein. Nach einer früheren Bemerkung ist die Reihe (2.) oder (6.) auch convergent für Werthe von x_0, deren absoluter Betrag $|x_0| > \varrho_m e^{2\pi}$ ist, und falls $\varrho_{\beta+1} : \varrho_\beta > e^{4\pi}$ ist, auch für solche Werthe von x_0, für welche $\varrho_\beta e^{2\pi} < |x_0| < \varrho_{\beta+1} e^{-2\pi}$ ist. Die Reihen (7.) sind daher für dieselben Werthe von x_0 convergent und stellen also in dem Falle, dass y in der ganzen Ebene eindeutig ist, als Functionen von x_0 betrachtet, discontinuirliche Grössen dar, welche innerhalb der erwähnten Convergenzbereiche constante, im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe haben.

Ist y so beschaffen, dass $x^\mu y$, wo μ eine ganze Zahl ist, für $x=0$ sowohl von Null als von Unendlich verschieden ist, dann verschwindet $\frac{d^\lambda(yx^\mu)}{(d\log x)^\lambda}$ mit x, ausser wenn $\lambda=0$. In der aus (7.) durch die Substitution $\varkappa=-\mu$ hervorgehenden Reihe

$$a_{-\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{d^\lambda(yx^\mu)}{(d\log x)^\lambda}\right)_{x=x_0}\frac{(2\pi i)^\lambda}{(\lambda+1)!},$$

welche für beliebig kleine x_0 gilt, kann daher in diesem Falle x_0 unendlich klein gesetzt werden, und da ihr Werth von x_0 unabhängig ist, so erhält man

$$a_{-\mu} = (yx^\mu)_{x=0}.$$

Ebenso findet man, dass die Coefficienten $a_{-\mu-1}, a_{-\mu-2}, \dots$ sämmtlich verschwinden *).

§. 2.

Um das im Vorhergehenden auseinandergesetzte Darstellungsverfahren auf die Functionen anzuwenden, die linearen homogenen Differentialgleichungen von der Form

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny = 0$$

---

*) Man kann übrigens für $a_\varkappa$ ausser (7.) noch viele andere Reihen herleiten; denn aus

$$y = \sum_{\varkappa=-\infty}^{\varkappa=+\infty} a_\varkappa x^\varkappa$$

folgt

$$\frac{d^\nu(yx^\mu)}{dx^\nu} = \sum_{\varkappa=-\infty}^{\varkappa=+\infty}(\varkappa+\mu)(\varkappa+\mu-1)\dots(\varkappa+\mu-\nu+1)a_\varkappa x^{\varkappa+\mu-\nu},$$

woraus wie oben sich ergiebt

$$(\varkappa+\mu)(\varkappa+\mu-1)\dots(\varkappa+\mu-\nu+1)a_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(2\pi i)^\lambda}{(\lambda+1)!}\cdot\left(\frac{d^\lambda\left(x^{-\varkappa-\mu+\nu}\frac{d^\nu(yx^\mu)}{dx^\nu}\right)}{(d\log x)^\lambda}\right)_{x=x_0},$$

und indem man $\varkappa+\mu=\nu$ setzt und dieselben Schlüsse wie oben anwendet:

$$1.2.3\dots\nu a_{\nu-\mu} = \left(\frac{d^\nu(yx^\mu)}{dx^\nu}\right)_{x=0}.$$

Ist $\mu=0$, also y für $x=0$ endlich, so dass der Nullpunkt kein singulärer Punkt für y ist, so erhält man die bekannte Formel

$$1.2.3\dots\nu a_\nu = \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right)_{x=0}.$$

genügen, ist es bequem, die letzteren auf die von *Riemann* gewählte Form *)

$$(8.)\qquad p_0\frac{d^n y}{(d\log x)^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{d\log x}+p_n y = 0$$

zu bringen, wo $p_0, p_1, \ldots p_n$ Functionen von x bedeuten. Durch Multiplication mit einem gegebenen Factor können wir uns bewirkt denken, dass die Coefficienten für endliche x nicht unendlich werden und zugleich für dasselbe x nicht sämmtlich verschwinden. Wir setzen ferner zunächst voraus, dass die Coefficienten eindeutig sind. (Für den Fall, dass sie rationale Functionen von x sind, müssen sie nach der vorhergehenden Annahme ganze Functionen von x sein, die keinen gemeinsamen Factor enthalten.)

Gehört die Gleichung (8.) zu der von Herrn *Fuchs* zuerst aufgestellten und untersuchten Klasse, die dadurch charakterisirt ist, dass sämmtliche Integrale mit endlichen Potenzen von x multiplicirt, für $x=0$ verschwinden **), dann ist $p_0(x)$ für $x=0$ von Null verschieden und die Gleichung für die Exponenten, zu denen die Glieder eines Fundamentalsystems von Integralen gehören ***), lautet †)

$$f(r)=p_0(0)r^n+p_1(0)r^{n-1}+p_2(0)r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}(0)r+p_n(0)=0.$$

Verschwindet p_0 mit x, so haben wenigstens einige der Integrale der Gleichung (8.) in der Umgebüng des Nullpunktes nicht die oben erwähnte Beschaffenheit. Diese Integrale führen nach der Bezeichnung des Herrn *Thomé* den Namen „irreguläre Integrale.“ Ist in der Reihe der Grössen $p_0(0)$, $p_1(0)$, $p_2(0)\ldots$, welche nach unserer Voraussetzung nicht sämmtlich verschwinden können, $p_k(0)$ die erste, welche nicht verschwindet, so ist k die Zahl, welche Herr *Thomé* ††) „den charakteristischen Index“ der Differentialgleichung für $x=0$ nennt. Der Grad von $f(r)$ ist alsdann $n-k$ †††).

---

*) Ueber diese Umformung vergl. *Most*, *Schlömilchs* Z. XV, p. 427 und *Frobenius*, dieses Journal Bd. 80 p. 319 Anm. Am einfachsten übersieht man die Beziehungen zwischen den p und P aus der für jedes ν geltenden Identität:

$$p_0\nu^n+p_1\nu^{n-1}+p_2\nu^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\nu+p_n$$
$$=\frac{P_0}{x^n}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1)+\frac{P_1}{x^{n-1}}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+2)+\cdots+\frac{P_{n-1}}{x}\nu+P_n.$$

**) Dieses Journal Bd. 66 p. 146 und Bd. 68 p. 360.

***) Herr *Fuchs*, welcher diese Gleichung zuerst aufgestellt hat, nennt sie „determinirende Fundamentalgleichung.“ Neuerdings hat Herr *Frobenius* dafür die kürzere Bezeichnung „determinirende Gleichung“ vorgeschlagen, dieses Journal Bd. 80 p. 318 Anm.

†) Vgl. *Most* a. a. O.

††) Dieses Journal Bd. 75, p. 267.

†††) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 80 p. 318 Anm.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (8.) sind ausser dem Nullpunkte und dem Unendlichkeitspunkte diejenigen, für welche $p_0(x)$ verschwindet. Seien die letzteren mit Ausschluss des Punktes $x=0$, falls dieser unter ihnen sich befinden sollte,

$$x = \varrho_1 e^{\varphi_1 i}, \quad \dots \quad x = \varrho_m e^{\varphi_m i},$$

so sind die singulären Punkte der aus (8.) durch die Substitution $x = e^z$ hervorgehenden Differentialgleichung

$$(8^a.) \qquad p_0(e^z)\frac{d^n y}{dz^n} + p_1(e^z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n(e^z)\,y \;=\; 0$$

ausser $z=\infty$ die Punktreihen

$$z = \sigma_1 + \varphi_1 i + 2\varkappa_1 \pi i, \quad \dots \quad z = \sigma_m + \varphi_m i + 2\varkappa_m \pi i,$$

wo σ_a den reellen Werth von $\log \varrho_a$ und $\varkappa_1 \dots \varkappa_m$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Bezeichnet z_0 einen endlichen Punkt, der mit keinem der vorstehend bezeichneten Punkte zusammenfällt, so giebt es nach dem Fundamentalsatz der linearen Differentialgleichungen eine in der Umgebung von z_0 convergirende nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe, welche so beschaffen ist, dass $y, \frac{dy}{dz}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ für $z=z_0$ beliebig gegebene Werthe $c_1, c_2, \dots c_n$ annehmen *). Durch die Gleichung $(8^a.)$ und die mittelst successiver Differentiation nach z aus ihr abgeleiteten Gleichungen ergeben sich nach einander die Werthe des n^{ten} und aller folgenden Differentialquotienten von y für $z=z_0$ als lineare homogene Functionen der Grössen $c_1, c_2, \dots c_n$, deren Coefficienten aus den Grössen $p(e^{z_0})$ und den Werthen der Ableitungen der Functionen $p(e^z)$ nach z für $z=z_0$ durch Multiplication und Addition, sowie durch Division mit ganzen positiven Potenzen von $p_0(e^{z_0})$ zusammengesetzt sind. Nach dem Obigen ist aber $\left(\frac{d^\varkappa p(e^z)}{dz^\varkappa}\right)_{z=z_0}$ aus den Grössen

$$x_0 p'(x_0), \quad x_0^2 p''(x_0), \quad \dots \quad x_0^\varkappa p^{(\varkappa)}(x_0),$$

$$\text{wo } p^\varkappa(x_0) \text{ für } \left(\frac{d^\varkappa p(x)}{dx^\varkappa}\right)_{x=x_0} \text{ gesetzt ist,}$$

durch Multiplication mit Zahlencoefficienten und Addition zusammengesetzt. Es sind daher in den Ausdrücken der Differentialquotienten von y nach z

*) *Fuchs*, dieses Journal, Bd. 66, p. 122.

für $z = z_0$ in der Form linearer homogener Functionen von $c_1, \dots c_n$ die Coefficienten der c Quotienten, deren Zähler aus den Grössen $x_0^\lambda p^{(\lambda)}(x_0)$ durch Multiplication und Addition zusammengesetzt sind, und deren Nenner eine ganze positive Potenz von $p_0(x_0)$ ist. Setzen wir nun

$$(9.) \quad \left(\frac{d^\varkappa y}{dz^\varkappa}\right)_{z=z_0} = \varphi_1^\varkappa(x_0)c_1 + \varphi_2^\varkappa(x_0)c_2 + \dots + \varphi_n^\varkappa(x_0)c_n,$$

so erhalten wir

$$(10.) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

wo

$$(11.) \quad y_i = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \varphi_i^\varkappa(x_0) \frac{(z-z_0)^\varkappa}{\varkappa!}$$

ist. Betreffs der Coefficienten $\varphi_i^\varkappa(x_0)$ bemerken wir, dass, da für $z = z_0$ die Functionen $y, \frac{dy}{dz}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$ resp. die Werthe $c_1, c_2, \dots c_n$ annehmen sollen, die Gleichungen

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1^0(x_0) = 1, & \varphi_2^0(x_0) = 0, & \dots & \varphi_n^0(x_0) = 0, \\
\varphi_1^1(x_0) = 0, & \varphi_2^1(x_0) = 1, & \dots & \varphi_n^1(x_0) = 0, \\
\vdots & & & \\
\varphi_1^{n-1}(x_0) = 0, & \varphi_2^{n-1}(x_0) = 0, & \dots & \varphi_n^{n-1}(x_0) = 1
\end{array}$$

bestehen müssen. Die durch die Reihen (11.) definirten Functionen $y_1, \dots y_n$ sind offenbar selbst Integrale der Gleichung (9.) von der Beschaffenheit, dass für $z = z_0$

$$(12.) \quad \begin{cases}
y_1 = 1, & \frac{dy_1}{dz} = 0, & \dots & \frac{d^{n-1}y_1}{dz^{n-1}} = 0, \\
y_2 = 0, & \frac{dy_2}{dz} = 1, & \dots & \frac{d^{n-1}y_2}{dz^{n-1}} = 0, \\
\vdots & & & \\
y_n = 0, & \frac{dy_n}{dz} = 0, & \dots & \frac{d^{n-1}y_n}{dz^{n-1}} = 1
\end{cases}$$

ist. Da demnach die Determinante dieses Systems von Integralen

$$\Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{dz} \frac{d^2 y_3}{dz^2} \dots \frac{d^{n-1}y_n}{dz^{n-1}}$$

für $z = z_0$ den Werth Eins hat, so sind die Integrale $y_1, \dots y_n$ von einander linearunabhängig oder bilden nach der *Fuchs*schen Bezeichnung ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (8^a.). Es ergiebt sich ferner leicht, dass die Determinante

$$\Sigma \pm \left(y_1 \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2 y_3}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)$$

für $x = x_0$ den Werth $\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ hat, also von Null verschieden ist, folglich bilden $y_1, \dots y_n$, als Functionen von x betrachtet, auch ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (8.).

Aus (10.) erhält man durch $(n-1)$-malige Differentiation

$$(10^a.)\quad \frac{dy}{dz} = c_1\frac{dy_1}{dz}+\dots+c_n\frac{dy_n}{dz}, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} = c_1\frac{d^{n-1}y_1}{dz^{n-1}}+\dots+c_n\frac{d^{n-1}y_n}{dz^{n-1}},$$

wo $\frac{d^\lambda y_i}{dz^\lambda}$ nach (11.) durch die Reihe

$$(11^a.)\qquad \frac{d^\lambda y_i}{dz^\lambda} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty}\varphi_i^{\varkappa+\lambda}(x_0)\frac{(z-z_0)^\varkappa}{\varkappa!}$$

gegeben ist.

Wählen wir nun den Punkt x_0 so, dass $0 < |x_0| < \varrho_1 e^{-2\pi}$, also reeller Theil von $z_0 < \sigma_1 - 2\pi$, dann gelten die Darstellungen (11.) und (11^a.) noch für $z = z_0 + 2\pi i$. Durch diese Substitution in den Ausdrücken (10.) und (10^a.) erhält man die Werthe, welche

$$y, \quad \frac{dy}{d\log x}, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}}$$

nach einem positiven Umlaufe um den Nullpunkt in x_0 annehmen. Bezeichnet man diese Werthe mit

$$\bar{y}_0, \quad \left(\overline{\frac{dy}{d\log x}}\right)_0 \dots \left(\overline{\frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}}}\right)_0$$

und führt ein:

$$(13.)\qquad a_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty}\varphi_i^{\varkappa+\lambda-1}(x_0)\frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!},$$

so erhält man:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \bar{y}_0 = c_1a_{11}+c_2a_{21}+\dots+c_na_{n1}, \\ \left(\overline{\frac{dy}{d\log x}}\right)_0 = c_1a_{12}+c_2a_{22}+\dots+c_na_{n2}, \\ \vdots \\ \left(\overline{\frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}}}\right)_0 = c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\dots+c_na_{nn}. \end{cases}$$

Ein Integral der Differentialgleichung (8.) mit den obigen Anfangswerthen drückt sich aber durch das Fundamentalsystem $y_1, \dots y_n$ mit den Anfangswerthen (12.) in folgender Gestalt aus

$$\bar{y} = (c_1a_{11}+\dots+c_na_{n1})y_1+\dots+(c_1a_{1n}+\dots+c_na_{nn})y_n,$$

während dasselbe Integral vor dem Umlauf durch dasselbe Fundamentalsystem in der Gestalt

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

dargestellt war.

Da $c_1, \ldots c_n$ beliebige Constanten sind, so folgt, dass, wenn man unter $\bar{y}_\alpha$ die Function versteht, in welche y_α nach einem positiven Umlauf um den Nullpunkt der x-Ebene übergeht, die Beziehungen bestehen

$$\bar{y}_1 = a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n, \quad \ldots \quad \bar{y}_n = a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n.$$

Durch diese Relationen zwischen den Gliedern eines Fundamentalsystems vor und nach dem Umlauf um den Nullpunkt ist nach den Sätzen, die wir Herrn *Fuchs* verdanken *), das Verhalten jedes Integrals der Differentialgleichung (8.) in der Umgebung des Nullpunktes vollkommen bestimmt. Die Grössen $a_{11} \ldots a_{nn}$, welche bekanntlich von der Wahl des Fundamentalsystems abhängen, erscheinen hier, wo die Anfangswerthe der Integrale des Fundamentalsystems und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen fixirt sind, als Functionen von x_0, was darin seinen Grund hat, dass eben das Fundamentalsystem ein anderes ist, je nach den verschiedenen Werthen von x_0, für welche die Glieder desselben nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen die oben vorgeschriebenen Werthe (12.) haben.

Nach einem anderen Satze des Herrn *Fuchs* **) hängen jedoch die Coefficienten der nach Potenzen von ω entwickelten Fundamentalgleichung:

$$(15.) \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\omega & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

nicht mehr von der Wahl des Fundamentalsystems ab, folglich müssen die Werthe der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von ω, somit auch die Wurzeln ω selbst von x_0 unabhängig sein.

Die Reihen (13.) für $a_{i\lambda}$ sind wie leicht zu ersehen (vergl. S. 190) auch convergent für solche x_0, deren absoluter Betrag $|x_0| > \varrho_m e^{2\pi}$ ist, ferner, falls $\varrho_{\beta+1} : \varrho_\beta > e^{4\pi}$ ist, auch für solche Werthe x_0, für die $\varrho_\beta e^{2\pi} < |x_0| < \varrho_{\beta+1} e^{-2\pi}$ ist. Die Unabhängigkeit nun der Coefficienten in der Fundamentalgleichung

*) Dieses Journal Bd. 66 p. 131 ff.

**) ib. p. 132.

von x_0 zeigt, dass diese Coefficienten discontinuirliche Functionen von x_0 sind, die innerhalb der angegebenen Bereiche constante, im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe annehmen.

Gehört die Gleichung (8.) zu der von Herrn *Fuchs* (s. oben) untersuchten Klasse, dann ist, wie schon erwähnt, $p_0(0)$ von Null verschieden und nach den früheren Bemerkungen über die Zusammensetzung der Grössen $\varphi_i^\varkappa(x_0)$ aus den Werthen der p und ihrer Ableitungen für $x = x_0$ bleiben dieselben für $x_0 = 0$ endlich. Ihre Entwickelung nach steigenden Potenzen von x_0 enthält also, wenn x_0 in der Umgebung des Nullpunktes sich befindet, nur ganze *positive* Potenzen von x_0, dasselbe gilt von den Reihen (13.) für $a_{i\lambda}$ und endlich für die aus ihnen durch Multiplication und Addition zusammengesetzten Coefficienten der Fundamentalgleichung (15.). Da diese von x_0 unabhängig sind, so müssen alle mit Potenzen von x_0 behafteten Glieder identisch verschwinden, so dass es nur darauf ankommt, die von x_0 freien Terme in den Coefficienten zu ermitteln. Diese werden aber in unserem Falle aus den $a_{i\lambda}$ erhalten, wenn man von denselben nur die von x_0 freien Terme beibehält, und die letzteren endlich gehen aus den Ausdrücken (13.) für $a_{i\lambda}$ hervor, wenn man statt der $\varphi_i^\varkappa(x_0)$ die von x_0 freien Terme derselben, die wir kurz mit $\varphi_i^\varkappa(0)$ bezeichnen wollen, substituirt. Berücksichtigt man nun, dass alle Ableitungen der p nach $\log x$ nur Glieder enthalten, die mit Potenzen von x behaftet sind, und also die Werthe derselben für $x = x_0$ für die Bestimmung der $\varphi_i^\varkappa$ nicht in Betracht kommen, so erkennt man leicht, dass, wenn man aus den recurrenten Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} p_0(0)u_n \;\;\, +p_1(0)u_{n-1}+\cdots+p_n(0)u_0 = 0, \\ p_0(0)u_{n+1}+p_1(0)u_n \;\;\;\, +\cdots+p_n(0)u_1 = 0, \\ p_0(0)u_{n+2}+p_1(0)u_{n+1}+\cdots+p_n(0)u_2 = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

die $u_\varkappa$ als lineare homogene Functionen von $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ bestimmt, die $\varphi_i^\varkappa(0)$ als Coefficienten der $u_\varkappa$ auftreten, so dass

$$u_\varkappa = \varphi_1^\varkappa(0)u_0+\varphi_2^\varkappa(0)u_1+\cdots+\varphi_n^\varkappa(0)u_{n-1}.$$

Nun ist aber eine Lösung der Gleichungen (16.) $u_\varkappa = r_\alpha^\varkappa$, wenn r_α eine Wurzel der Gleichung

$$p_0(0)r^n+p_1(0)r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}(0)r+p_n(0) = 0$$

bedeutet. Folglich ist

$$r_\alpha^\varkappa = \varphi_1^\varkappa(0)+\varphi_2^\varkappa(0)r_\alpha+\cdots+\varphi_n^\varkappa(0)r_\alpha^{n-1},$$

also auch

$$r_\alpha^{\varkappa+\lambda-1} = \varphi_1^{\varkappa+\lambda-1}(0)+\varphi_2^{\varkappa+\lambda-1}(0)r_\alpha+\cdots+\varphi_n^{\varkappa+\lambda-1}(0)r_\alpha^{n-1},$$

woraus nach (13.) folgt

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} r_\alpha^{\varkappa+\lambda-1}\frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!} = r_\alpha^{\lambda-1}e^{2\pi i r_\alpha} = a_{1\lambda}(0)+a_{2\lambda}(0)r_\alpha+\cdots+a_{n\lambda}(0)r_\alpha^{n-1},$$

wo $a_{i\lambda}(0)$ den von x_0 freien Term in der Entwickelung von $a_{i\lambda}$ bezeichnet. Wir erhalten somit folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} a_{11}(0)-e^{2\pi i r_\alpha}+a_{21}(0)r_\alpha & +\cdots+a_{n1}(0)r_\alpha^{n-1} & & = 0, \\ a_{12}(0) \quad +(a_{22}(0)-e^{2\pi i r_\alpha})r_\alpha & +\cdots+a_{n2}(0)r_\alpha^{n-1} & & = 0, \\ \vdots & & & \\ a_{1n}(0) \quad +a_{2n}(0)r_\alpha & +\cdots+(a_{nn}(0)-e^{2\pi i r_\alpha})r_\alpha^{n-1} & & = 0, \end{array}$$

vermöge dessen

$$\begin{vmatrix} a_{11}(0)-e^{2\pi i r_\alpha} & \dots & a_{n1}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}(0) & \dots & a_{nn}(0)-e^{2\pi i r_\alpha} \end{vmatrix} = 0$$

sein muss. Es folgt hieraus, dass die Fundamentalgleichung (15.), deren Coefficienten, wie wiederholt bemerkt, von x_0 unabhängig sind, die Wurzeln

$$\omega_1 = e^{2\pi i r_1}, \; \dots \; \omega_n = e^{2\pi i r_n}$$

hat, was mit den bekannten Ergebnissen (Vgl. S. 194) übereinstimmt.

Es ist wohl kaum nöthig hinzuzufügen, dass diese Bestimmung der Wurzeln der Fundamentalgleichung nur für den Umlauf in der Umgebung des Nullpunktes gilt. Denn wenn x_0 in den anderen oben angegebenen Bereichen liegt, dann gelten andere Entwickelungen der $p_\varkappa(x_0)$, in welchen im Allgemeinen positive und negative Potenzen von x_0 in unendlicher Anzahl auftreten. Die obigen Folgerungen waren aber wesentlich an die für die Umgebung des Nullpunktes gültigen Entwickelungen geknüpft.

Es giebt noch eine Klasse von Gleichungen, bei denen die Wurzeln der zum Nullpunkt gehörigen Fundamentalgleichung eine ebenso einfache Gestalt annehmen.

Lässt sich nämlich die Differentialgleichung auf die Form bringen

$$(17.)\quad \begin{cases} x^n\dfrac{d^ny}{dx^n}+x^{n-1}\left(A_1+\dfrac{B_1}{x}+\dfrac{C_1}{x^2}+\text{etc.}\right)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots \\ +x\left(A_{n-1}+\dfrac{B_{n-1}}{x}+\dfrac{C_{n-1}}{x^2}+\text{etc.}\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(A_n+\dfrac{B_n}{x}+\dfrac{C_n}{x^2}+\text{etc.}\right)y = 0, \end{cases}$$

welche bei der Einführung von $\log x$ für x in

$$\frac{d^n y}{(d\log x)^n}+\left(a_1+\frac{b_1}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\text{etc.}\right)\frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}}+\text{etc.}$$
$$+\left(a_{n-1}+\frac{b_{n-1}}{x}+\frac{c_{n-1}}{x^2}+\text{etc.}\right)\frac{dy}{d\log x}+\left(a_n+\frac{b_n}{x}+\frac{c_n}{x^2}+\text{etc.}\right)y \;=\; 0$$

übergeht, so erkennt man leicht, dass die Operationen zur Bildung der Coefficienten der Fundamentalgleichung lediglich aus Multiplication und Addition von Reihen bestehen, die nach Potenzen von $\frac{1}{x_0}$ fortschreiten. Die in Rede stehenden Coefficienten sind demnach selbst Reihen von solcher Gestalt, in denen wegen ihrer Unabhängigkeit von x_0 die mit Potenzen von $\frac{1}{x_0}$ behafteten Glieder identisch verschwinden müssen. Ebenso unmittelbar erhellt, dass zu den von x_0 freien Termen in den Coefficienten nur die von x_0 freien Terme in den Reihen, aus denen sie hervorgegangen sind, beitragen können. Erwägt man endlich, dass, da

$$\frac{d^x\left(\frac{1}{x^\mu}\right)}{(d\log x)^x} \;=\; (-\mu)^x\frac{1}{x^\mu}$$

ist, die Grössen b, c etc. nur mit Potenzen von $\frac{1}{x_0}$ behaftet in den Ausdrücken $\varphi_i^x(x_0)$ vorkommen, also für die von x_0 freien Terme in ihnen ausser Betracht bleiben, so ergiebt sich, dass die letztgenannten Terme von $\varphi_i^x(x_0)$ als Coefficienten der Lösungen von recurrenten Gleichungen auftreten, die aus (16.) hervorgehen, wenn man für $p_0(0)$, $p_1(0)$, ... $p_n(0)$ der Reihe nach $1, a_1, \dots a_n$ setzt. Durch Anwendung derselben Folgerungen wie oben gelangt man zu dem Schluss, dass die Wurzeln der zum Nullpunkt gehörigen Fundamentalgleichung

$$\omega_1 = e^{2r_1\pi i}, \quad \dots \quad \omega_n = e^{2r_n\pi i}$$

sind, wo $r_1 \dots r_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots+a_{n-1}r+a_n \;=\; 0$$

oder (Vgl. S. 194 Anm.) der Gleichung

$$\text{(18.)}\qquad r(r-1)\dots(r-n+1)+A_1r(r-1)\dots(r-n+2)+\cdots+A_{n-1}r+A_n \;=\; 0$$

sind. Zu demselben Resultat gelangt man übrigens auch unmittelbar, wenn man sich die Frage stellt, wie eine Differentialgleichung in der Umgebung des Nullpunktes beschaffen sein muss, deren sämmtliche Integrale in derselben Umgebung aus Functionen der Form $x^r\left(\alpha+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\text{etc.}\right)$ linear

zusammengesetzt sein sollen, wo α von Null verschieden ist. Man erhält dann als Differentialgleichung die Form (17.) und durch Einsetzen eines Integrals obiger Form für y die Gleichung (18.) zur Bestimmung der r. Die Form (17.) hat hiernach die Eigenthümlichkeit mit den Gleichungen der *Fuchs*schen Klasse gemein, dass von den unendlich vielen um ganze Zahlen sich unterscheidenden r, die durch die Gleichung $e^{2r\pi i} = \omega$ definirt sind, ein bestimmter Werth besonders charakterisirt ist, nämlich dadurch, dass für ihn $x^{-r}y$ die Form $\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \text{etc.}$ hat, wo α von Null verschieden ist. Wir bemerken noch, dass die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten, die bekanntlich $x = \infty$ zu ihrem singulären Punkte hat, wenn man $x = \frac{1}{t}$ setzt, auf die Form (17.) gebracht werden kann, also für $x = \infty$ zu der hier betrachteten Klasse gehört.

Was die Darstellung der Integrale eines Fundamentalsystems nach Potenzen von x in der Umgebung des Nullpunktes betrifft, so kann sie, wenn die Grössen $a_{i\varkappa}$ bekannt sind, in folgender Weise erhalten werden. Bekanntlich haben die Integrale in der Umgebung des Nullpunktes die Form *):

$$y = x^r\{\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \cdots + \varphi_\mu (\log x)^\mu\},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\mu$ in Reihen nach ganzen positiven und negativen Potenzen entwickelt werden können, oder sie sind lineare homogene Verbindungen von Ausdrücken dieser Form; r bedeutet einen der Werthe des Ausdrucks $\frac{\log \omega}{2\pi i}$, ω eine Wurzel der Fundamentalgleichung (15.). Insbesondere entsprechen einer vielfachen Wurzel ω eine oder mehrere Gruppen von Integralen von der Form **):

$$y_m = x^r f(u), \quad y_{m-1} = x^r \omega \Delta f(u), \quad \ldots \quad y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta^{m-1} f(u),$$

wo $u = \frac{\log x}{2\pi i}$ gesetzt ist, und $f(u)$ eine ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von u bedeutet

$$f(u) = A_0 + A_1 u + \cdots + A_{m-1} u^{m-1},$$

wo $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ in Reihen nach ganzen positiven und negativen Potenzen von x entwickelt werden können; $\Delta f(u)$ bezeichnet die Differenz $f(u+1) - f(u)$

---

*) *Fuchs*, dieses Journal, Bd. 66 p. 136.

**) Dieses Journal, Bd. 76 p. 122.

und $\Delta^{x} f(u)$ die Differenz x^{ter} Ordnung von $f(u)$ mit dem Increment Eins. Die Elemente der angegebenen Gruppen sind lineare homogene Functionen des Fundamentalsystems $y_1, \dots y_n$ mit constanten Coefficienten, deren Verhältnisse aus den a_{ix} durch successive Auflösung von linearen Gleichungssystemen gefunden werden.*) Nehmen wir der leichteren Uebersicht wegen den Fall, dass eine dreigliedrige Gruppe vorhanden sei:

$$\eta_3 = (A_0 + A_1 u + A_2 u^2) x^r,$$
$$\eta_2 = (A_1 + A_2 + 2 A_2 u) \omega x^r, \quad u = \frac{\log x}{2\pi i},$$
$$\eta_1 = 2 A_2 \omega^2 x^r,$$

so handelt es sich darum, die Reihen A_0, A_1, A_2 darzustellen. Sei nun

$$\eta_1 = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$

wo die Verhältnisse der c als gegeben anzusehen sind, und der gemeinschaftliche Factor beliebig angenommen werden kann, so ist der Werth der Function

$$A_2 = \frac{\eta_1 x^{-r}}{2\omega^2},$$

sowie der aller ihrer Ableitungen nach x, oder $\log x$, für $x = x_0$ aus der gegebenen Differentialgleichung bekannt, und da A_2 eine eindeutige Function von x ist, so erhält man nach § 1 (7.) für die Coefficienten b_x der unendlichen Reihe

$$2\omega^2 A_2 = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} b_x x^x$$

die Ausdrücke:

$$b_x = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left\{ \frac{d^\lambda (\eta_1 x^{-x-r})}{(d \log x)^\lambda} \right\}_{x=x_0} \frac{(2\pi i)^\lambda}{(\lambda+1)!}.$$

Da ferner in

$$\eta_2 = c'_1 y_1 + \cdots + c'_n y_n$$

die Verhältnisse der c' ebenfalls bekannt sind, so sind die Werthe der Function

$$A_1 = \frac{\eta_2 x^{-r}}{\omega} - A_2 \left(1 + \frac{2 \log x}{2\pi i}\right)$$

sowie ihrer sämmtlichen Ableitungen nach $\log x$ für $x = x_0$ bekannt und dadurch wie vorhin die Darstellung der eindeutigen Function A_1 in einer unendlichen Reihe nach ganzen positiven und negativen Potenzen von x

*) Dieses Journal, Bd. 76 p. 118 ff.

gegeben. Ebenso findet sich endlich, da η_3 ebenfalls eine bekannte lineare homogene Verbindung der y ist, die Darstellung von

$$A_0 = \eta_3 x^{-r} - A_1 \frac{\log x}{2\pi i} - A_2 \left(\frac{\log x}{2\pi i}\right)^2$$

in einer Reihe nach ganzen positiven und negativen Potenzen von x.

§ 3.

Zum Schluss wenden wir uns noch zu dem Falle der linearen homogenen Differentialgleichungen mit mehrdeutigen Coefficienten und beschränken uns hierbei auf die Betrachtung der Gleichungen von der Form

$$(19.)\qquad P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0,$$

wo $P_0, \dots P_n$ ganze Functionen von x und einer Grösse u bedeuten, die mit x durch die algebraische Gleichung

$$f(x, u) = 0,$$

die in u vom m^{ten} Grade sein möge, verbunden ist.

Setzt man 1) die Discriminante von $f(x, u)$, 2) die Eliminationsresultante von P_0 und $f(x, u)$, 3) den Coefficienten von u^m in $f(x, u)$ gleich Null, so stellen die Auflösungen dieser drei Gleichungen in x nebst $x = \infty$ sämmtliche singulären Punkte der Differentialgleichung (19.) dar.

Zur eindeutigen Bestimmung eines Integrales y der Gleichung (19.) in der Umgebung eines Punktes $x = a$ mit gegebenen Anfangswerthen von y und seinen $n-1$ ersten Ableitungen für diesen Punkt ist es nothwendig, dass dem Werthe a ein bestimmter Werth u_0 unter den m Wurzeln der Gleichung $f(a, u) = 0$ zugeordnet werde. Ist u_0 eine einfache endliche Wurzel derselben, dann giebt es eine einzige in der Umgebung von a gültige in einer Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Entwickelung von u, welche für $x = a$ in u_0 übergeht, und indem man diese in den Coefficienten in (19.) überall für u einsetzt, wird die Aufgabe auf die Integration einer Differentialgleichung mit in der Umgebung von a eindeutigen Coefficienten zurückgeführt.

Verschwindet P_0 nicht für das Werthepaar (a, u_0), so erhält man als Integral von (19.):

$$(20.)\qquad y = c_1 \varphi_1(x, u_0) + c_2 \varphi_2(x, u_0) + \cdots + c_n \varphi_n(x, u_0),$$

wo $c_1, \dots c_n$ die beliebig angenommenen Werthe von y und seinen $n-1$ ersten

Ableitungen für $x = a$ bedeuten und die Ausdrücke $\varphi_x(x, u_0)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ aufsteigende Reihen bedeuten, deren Coefficienten von u_0 abhängen. Solcher Integrale (20.) erhält man so viele, als es einfache endliche Wurzeln u der Gleichung $f(a, u) = 0$ giebt von der Beschaffenheit, dass P_0 für keines der Paare (a, u) verschwindet. Sie gehen aus (20.) hervor, indem statt der Reihen $\varphi_x(x, u_0)$ die entsprechenden Reihen $\varphi_x(x, u)$ gesetzt werden, während die c unverändert bleiben. Entspricht dem Werthe $x = a$ eine einfache Wurzel $u = \infty$, dann giebt es eine in der Umgebung von a gültige Entwickelung von u, die nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitet und eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativen Potenzen enthält. Führt man diese in (19.) ein, so erhält man wiederum eine Differentialgleichung mit in der Umgebung von a eindeutigen Coefficienten, in welcher $x = a$ einen singulären Punkt derselben bildet. Dasselbe gilt für den Fall, dass dem Werthe $x = a$ eine einfache endliche Wurzel $u = u_0$ zugeordnet ist, von der Beschaffenheit, dass P_0 für das Paar (a, u_0) verschwindet.

Wir gehen nunmehr zu dem Falle über, wo dem Werthe $x = a$ eine μ-fache $(\mu > 1)$ Wurzel u_0 der Gleichung $f(a, u) = 0$ zugeordnet ist. Die μ Functionen u, welche für $x = a$ in u_0 übergehen, zerfallen alsdann in eine Anzahl Gruppen von je $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\alpha$ Elementen, so dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\alpha = \mu$ ist. Sind einige der λ gleich Eins, so giebt es eben so viele in der Umgebung von a gültige Entwickelungen von u nach ganzen Potenzen von $x-a$, welche sämmtlich für $x = a$ in u_0 übergehen, und in (19.) für u eingesetzt, zu einer gleichen Zahl von Differentialgleichungen mit in der Umgebung von a eindeutigen Coefficienten führen.

Für eine Gruppe von λ Elementen, wo $\lambda > 1$ ist, gilt die Entwickelung *)

$$u = \sum_0^\infty {}_a c_a (x-a)^{-\nu + \frac{a}{\lambda}},$$

wo ν eine positive ganze Zahl oder Null ist, je nachdem der Werth u_0 für $x = a$ unendlich oder endlich ist.

Hier bemerken wir nun zunächst, dass die Untersuchung des Verhaltens der Integrale y bei einem λ-maligen Umlauf von x um a, nach welchem u den anfänglichen Werth wieder erhält, leicht wieder auf die

*) *Puiseux,* Liouville Journal, t. XV u. XVI.

Betrachtung von Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten zurückgeführt wird. Denn setzt man $x-a = t^\lambda$, dann wird

$$u = \sum_0^\infty {}_a c_a t^{-\lambda\nu+a},$$

und die Differentialgleichung (19.) wird durch diese Substitutionen in eine lineare Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen t transformirt, deren Coefficienten eindeutige Functionen von t in der Umgebung von $t=0$ sind und in der Entwickelung nach Potenzen von t nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen enthalten. Indem wir nun das Verhalten der Integrale y bei einem Umlaufe von t um $t=0$ nach § 2 ermitteln, erhalten wir die gesuchten Veränderungen dieser Integrale bei einem λ-maligen Umlaufe von x um $x=a$.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale bei einem einmaligen Umlauf um einen singulären Punkt, der für die Function u ein Windungspunkt $(\lambda-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, nehmen wir für diesen von nun an, der einfacheren Schreibweise wegen, den Nullpunkt und verstehen unter x_0 einen Punkt in der Umgebung des Nullpunktes von der Beschaffenheit, dass

$$0 < |x_0| < \varrho_1 e^{-2\pi},$$

wo ϱ_1 die Entfernung des dem Nullpunkt nächstgelegenen singulären Punktes der Differentialgleichung (19.) bedeutet. Die Elemente der Gruppe von Functionen u, die wir jetzt betrachten, sind durch die in der Umgebung des Nullpunktes gültige Entwickelung

$$(21.) \qquad u = \sum_0^\infty {}_a c_a x^{-\nu+\frac{a}{\lambda}}$$

gegeben.

Sie liefert für den Punkt x_0, der nach unserer Voraussetzung zur Umgebung des Nullpunktes gehört, λ verschiedene Werthe, die mit $u_0^1, u_0^2, \dots u_0^\lambda$ bezeichnet sein mögen, und die bei einem in x_0 beginnenden und endigenden Umlauf von x um den Nullpunkt innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe (21.) in einander übergehen.

Setzen wir nun ein System von λ Integralen

$$y_1, \; y_2, \; \dots \; y_\lambda,$$

dadurch fest, dass die Anfangswerthe jedes derselben und seiner $n-1$ ersten Ableitungen für $x=x_0$ resp. $b_1, b_2, \dots b_n$ sein sollen, dergestalt dass y_i das

aus der Zuordnung (x_0, u_0^i) hervorgehende Integral bedeute, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden für y_i die Darstellung:

$$(22.)\qquad y_i = b_1\varphi_1(x, u_0^i)+\cdots+b_n\varphi_n(x, u_0^i),$$

wo die φ nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Reihen bedeuten. Es mache nun x von x_0 aus einen in dem Convergenzbereich der Reihe (21.) verbleibenden Umlauf, durch welchen bei der Rückkehr in x_0 die Wurzel u_0^i in $u_0^{i'}$ übergegangen sein möge, gleichzeitig mögen die Werthe des Integrals y_i und seiner $n-1$ ersten Ableitungen in $x = x_0$ resp. $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ geworden sein, so wird die Darstellung der Function y_i nach erfolgtem Umlauf, die wir mit $\overline{y}_i$ bezeichnen, lauten:

$$(23.)\qquad \overline{y}_i = \beta_1\varphi_1(x, u_0^{i'})+\cdots+\beta_n\varphi_n(x, u_0^{i'}).$$

Wenn die β, wie im Folgenden geschehen wird, als lineare homogene Functionen der b bestimmt sind, so dass

$$\begin{aligned}\beta_1 &= d_{11}^i b_1+\cdots+d_{n1}^i b_n,\\ &\vdots \\ \beta_n &= d_{1n}^i b_1+\cdots+d_{nn}^i b_n,\end{aligned}$$

wo der zugefügte Index i andeutet, dass die Coefficienten d von der gewählten Wurzel u_0^i abhängen, so erhält man, indem man $\varphi_x(x, u_0^i) = \eta_{xi}$ setzt,

$$\overline{y}_i = b_1(d_{11}^i\eta_{1i'}+\cdots+d_{1n}^i\eta_{ni'})+\cdots+b_n(d_{n1}^i\eta_{1i'}+\cdots+d_{nn}^i\eta_{ni'}).$$

Hieraus erhellt, in Anbetracht dass $b_1, \dots b_n$ beliebig angenommene Constanten sind, durch Vergleichung mit (23.), dass die Functionen $\eta_{1i}, \dots \eta_{ni}$, welche selbst ein Fundamentalsystem von Integralen bilden, nach einem Umlauf der unabhängigen Variablen in der Umgebung des Nullpunktes übergehen in

$$(24.)\qquad \overline{\eta}_{1i} = d_{11}^i\eta_{1i'}+\cdots+d_{1n}^i\eta_{ni'} \dots \overline{\eta}_{ni} = d_{n1}^i\eta_{1i'}+\cdots+d_{nn}^i\eta_{ni'}.$$

Die Integrale $\eta_{1i}, \dots \eta_{ni}$ sind von der Beschaffenheit, dass für $x = x_0$

$$\begin{array}{llll}\eta_{1i} = 1, & \dfrac{d\eta_{1i}}{dx} = 0, & \dots & \dfrac{d^{n-1}\eta_{1i}}{dx^{n-1}} = 0,\\ \eta_{2i} = 0, & \dfrac{d\eta_{2i}}{dx} = 1, & \dots & \dfrac{d^{n-1}\eta_{2i}}{dx^{n-1}} = 0,\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta_{ni} = 0, & \dfrac{d\eta_{ni}}{dx} = 0, & \dots & \dfrac{d^{n-1}\eta_{ni}}{dx^{n-1}} = 1.\end{array}$$

Hierdurch und durch die Zuordnung (x_0, u_0^i) sind sie vollständig bestimmt; $u_0^{i'}$ war die Wurzel, in welche u_0^i nach einem Umlaufe um $x = 0$

übergeht, und die durch die Entwickelung (21.) sich ergiebt. Die Integrale $\eta_{1i'}, \dots \eta_{ni'}$ sind durch dieselben Anfangswerthe wie $\eta_{1i}, \dots \eta_{ni}$ und durch die Zuordnung $(x_0, u_0^{i'})$ definirt. Durch die Gleichung (24.) ist demnach ein bestimmtes Fundamentalsystem und damit sind sämmtliche demselben Paar (x_0, u_0^i) zugeordnete Integrale mit beliebigen Anfangswerthen in ihrem Verhalten in der Umgebung des Nullpunktes vollständig charakterisirt.

Es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Grössen $d_{\varkappa\lambda}^i$. Hierzu führen wir dem Verfahren in § 2 zufolge statt der Grössen $b_1, \dots b_n$ die in einfachem Zusammenhange stehenden Grössen $c_1, \dots c_n$ ein, welche die Werthe von y_i, $\frac{dy_i}{d\log x}$, $\dots$ $\frac{d^{n-1}y_i}{(d\log x)^{n-1}}$ für $x = x_0$ bedeuten, so dass

$$c_1 = b_1, \quad c_2 = x_0 b_1, \quad c_3 = x_0^2 b_2 + x_0 b_1, \quad c_4 = x_0^3 b_3 + 3x_0^2 b_2 + x_0 b_1, \quad \text{etc.}$$

Ebenso sei

$$\gamma_1 = \beta_1, \quad \gamma_2 = x_0\beta_1, \quad \gamma_3 = x_0^2\beta_2 + x_0\beta_1, \quad \text{etc.},$$

dann bestimmen wir die Grössen $\gamma_1, \dots \gamma_n$, welche die Werthe von

$$y_i \frac{dy_i}{d\log x}, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y_i}{(d\log x)^{n-1}}$$

für $x = x_0$ nach dem Umlauf bezeichnen, als Functionen der $c_1, \dots c_n$ auf folgende Weise.

Wir wandeln die Form (19.) um in die Form

$$(25.) \qquad p_0 \frac{d^n y}{(d\log x)^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}} + \dots + p_{n-1}\frac{dy}{d\log x} + p_n y = 0,$$

wo $p_0, p_1, \dots p_n$ wiederum ganze Functionen von x und u bedeuten. Aus der Gleichung (25.) und ihren Ableitungen nach $\log x$ erhält man

$$\left(\frac{d^\varkappa y_i}{d\log x}\right)_{x=x_0} = \psi_1^\varkappa(x_0, u_0^i)\, c_1 + \dots + \psi_n^\varkappa(x_0, u_0^i)\, c_n,$$

und folglich für y_i die Darstellung

$$(26.) \qquad y_i = c_1 \sum_0^\infty{}_\varkappa \psi_1^\varkappa(x_0, u_0^i) \frac{\left(\log \frac{x}{x_0}\right)^\varkappa}{\varkappa!} + \dots + c_n \sum_0^\infty{}_\varkappa \psi_n^\varkappa(x_0, u_0^i) \frac{\log\left(\frac{x}{x_0}\right)^\varkappa}{\varkappa!},$$

welche, da $|x_0| < \varrho_1 e^{-2\pi}$ vorausgesetzt ist, noch convergirt, wenn x einen vollen Umlauf gemacht hat. Setzt man demnach in (26.) und den aus (26.) hervorgehenden Darstellungen für

$$\frac{dy}{d\log x}, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{(d\log x)^{n-1}},$$

$$\log \frac{x}{x_0} = 2\pi i,$$

so gehen die linken Seiten in $\gamma_1, \dots \gamma_n$ über und man erhält

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= c_1 \sum_0^\infty {}_\varkappa \psi_1^\varkappa(x_0, u_0^i) \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!} + \cdots + c_n \sum_0^\infty {}_\varkappa \psi_n^\varkappa(x_0, u_0^i) \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}, \\
\gamma_2 &= c_1 \sum_0^\infty {}_\varkappa \psi_1^{\varkappa+1}(x_0, u_0^i) \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!} + \cdots + c_n \sum_0^\infty {}_\varkappa \psi_n^{\varkappa+1}(x_0, u_0^i) \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}, \\
&\vdots \\
\gamma_n &= c_1 \sum_0^\infty {}_\varkappa \psi_1^{\varkappa+n-1}(x_0, u_0^i) \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!} + \cdots + c_n \sum_0^\infty {}_\varkappa \psi_n^{\varkappa+n-1}(x_0, u_0^i) \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}.
\end{aligned}$$

Durch diese Relationen zwischen den γ und c sind diejenigen zwischen den β und b gleichfalls gegeben und damit die gesuchten Werthe der Coefficienten $d_{\varkappa\lambda}^i$ bestimmt.

Berlin, im October 1876.

On the double Θ-functions in connexion with a 16-nodal quartic surface.

(By Prof. *A. Cayley* at Cambridge.)

I have before me *Göpel's* Memoir „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis"; this Journ. t. 35 (1847) pp. 277–312. Writing P_1, P_2, P_3 etc. in place of his P', P'', P''' etc., also α, β, γ, δ, X', Y', Z', W', in place of his t, u, v, w, T, U, V, W, the system of 16 equations given p. 287 is

$$
\begin{array}{rl}
(1.) & P^2 = (\alpha, -\beta, -\gamma, \delta)(X', Y', Z', W'),\\
(4.) & P_1^2 = (\alpha, \beta, -\gamma, -\delta)(X', Y', Z', W'),\\
(9.) & P_2^2 = (\alpha, -\beta, \gamma, -\delta)(X', Y', Z', W'),\\
(12.) & P_3^2 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)(X', Y', Z', W'),\\
(3.) & Q^2 = (\beta, -\alpha, -\delta, \gamma)(X', Y', Z', W'),\\
(2.) & Q_1^2 = (\beta, \alpha, -\delta, -\gamma)(X', Y', Z', W'),\\
(11.) & Q_2^2 = (\beta, -\alpha, \delta, -\gamma)(X', Y', Z', W'),\\
(10.) & Q_3^2 = (\beta; \alpha, \delta, \gamma)(X', Y', Z', W'),\\
(13.) & R^2 = (\gamma, -\delta, -\alpha, \beta)(X', Y', Z', W'),\\
(16.) & R_1^2 = (\gamma, \delta, -\alpha, -\beta)(X', Y', Z', W'),\\
(5.) & R_2^2 = (\gamma, -\delta, \alpha, -\beta)(X', Y', Z', W'),\\
(8.) & R_3^2 = (\gamma, \delta, \alpha, \beta)(X', Y', Z', W'),\\
(15.) & S^2 = (\delta, -\gamma, -\beta, \alpha)(X', Y', Z', W'),\\
(14.) & S_1^2 = (\delta, \gamma, -\beta, -\alpha)(X', Y', Z', W'),\\
(7.) & S_2^2 = (\delta, -\gamma, \beta, -\alpha)(X', Y', Z', W'),\\
(6.) & S_3^2 = (\delta, \gamma, \beta, \alpha)(X', Y', Z', W'),
\end{array}
$$

viz. we have $P^2 = \alpha X' - \beta Y' - \gamma Z' + \delta W'$ etc. The reason for the apparently arbitrary manner in which I have numbered these equations, will appear further on. I recall that the sixteen double Θ-functions (that is, Θ-functions of two arguments u, u') are *)

*) The same functions in *Rosenhain's* notation are

00,	02,	20,	22
01,	03,	21,	23
10,	12,	30,	32
11,	13,	31,	33

viz. the figures here written down are the suffixes of his ϑ-functions, $00 = \vartheta_{0,0}(v, w)$ etc.

$$\begin{array}{cccc} P, & P_1, & P_2, & P_3, \\ iQ, & Q_1, & iQ_2, & Q_3, \\ iR, & iR_1, & R_2, & R_3, \\ S, & iS_1, & iS_2, & S_3, \end{array}$$

(the factor i, $=\sqrt{-1}$, being introduced in regard to the six functions which are odd functions of the arguments), but disregarding the sign, I speak of P^2, P_1^2, $\ldots Q^2$ etc., as the squared functions, or simply as the squares; α, β, γ, δ are constants (depending of course on the parameters of the Θ-functions); X', Y', Z', W' (which are however to be eliminated) are themselves Θ-functions to a different set of parameters: the 16 equations express that the squared functions P^2, P_1^2 etc. are linear functions of X', Y', Z', W', and they consequently serve to obtain linear relations between the squared functions: viz. by means of them *Göpel* expresses the remaining 12 squares, each of them in terms of the selected four squares P_1^2, P_2^2, S_1^2, S_2^2, which are linearly independent: that is, he obtained linear relations between five squares, and he seems to have assumed that there were not any linear relations between fewer than five squares.

It appears however by *Rosenhain*'s „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes etc." Mém. Sav. Etrangers t. 11 (1851) pp. 364—468, that there are in fact linear relations between four squares, viz. that there exist sixes of squares such that, selecting at pleasure any three out of the six, each of the remaining three squares can be expressed as a linear function of these three squares: and knowing this result, it is easy to verify it by means of the sixteen equations, and moreover to show that there are in all 16 such sixes: these are shown by the following scheme which I copy from *Kummer*'s memoir „Ueber die algebraischen Strahlensysteme u. s. w." Berlin. Abh. (1866) p. 66: viz. the scheme is

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9
7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11.

In fact to show that any four of the squares, for instance 1, 9, 13, 8, that is, P^2, P_2^2, R^2, R_3^2, are linearly connected, it is only necessary to show that the determinant of coefficients

$$\begin{vmatrix} \alpha, & -\beta, & -\gamma, & \delta \\ \alpha, & -\beta, & \gamma, & -\delta \\ \gamma, & -\delta, & -\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta, & \alpha, & \beta \end{vmatrix}$$

is $=0$, or what is the same thing, that there exists a linear function of the new variables (X, Y, Z, W), which putting for these variables the values in any line of this determinant will become $=0$: we have such a function, viz. this is

$$\beta X+\alpha Y-\delta Z-\gamma W,$$

or say

$$[1.] \quad (\beta, \ \alpha, \ -\delta, \ -\gamma)(X, Y, Z, W);$$

and this function also vanishes if for (X, Y, Z, W) we substitute the values

$$\begin{matrix} \delta, & -\gamma, & \beta, & -\alpha, \\ \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha, \end{matrix}$$

which belong to 7, 6, that is S_2^2 and S_3^2 respectively: it thus appears that 1, 9, 13, 8, 7, 6, that is P^2, P_2^2, R^2, R_3^2, S_2^2, S_3^2 are a set of six squares having the property in question. I remark that the process of forming the linear functions is a very simple one; we write down six lines, and thence directly obtain the result, thus

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & \alpha, & -\beta, & -\gamma, & \delta \\ 9 & \alpha, & -\beta, & \gamma, & -\delta \\ 13 & \gamma, & -\delta, & -\alpha, & \beta \\ 8 & \gamma, & \delta, & \alpha, & \beta \\ 7 & \delta, & -\gamma, & \beta, & -\alpha \\ 6 & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha \\ \hline & \beta, & \alpha, & -\delta, & -\gamma \end{array}$$

viz. β, α, δ, γ are the letters not previously occurring in the four columns respectively: the first letter β is taken to have the sign $+$, and then the remaining signs are determined by the condition that combining

the last line with any line above it (e. g. with the line next above it $\beta\delta+\alpha\gamma-\delta\beta-\gamma\alpha$) the sum must be zero.

We find in this way as the conditions for the existence of the 16 sixes respectively

$$
\begin{array}{ll}
[1.] & (\beta,\ \alpha,\ -\delta,\ -\gamma)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[2.] & (\alpha,\ -\beta,\ -\gamma,\ \delta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[3.] & (\alpha,\ \beta,\ -\gamma,\ -\delta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[4.] & (\beta,\ -\alpha,\ -\delta,\ \gamma)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[5.] & (\delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[6.] & (\gamma,\ -\delta,\ \alpha,\ -\beta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[7.] & (\gamma,\ \delta,\ \alpha,\ \beta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[8.] & (\delta,\ -\gamma,\ \beta,\ -\alpha)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[9.] & (\beta,\ \alpha,\ \delta,\ \gamma)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[10.] & (\alpha,\ -\beta,\ \gamma,\ -\delta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[11.] & (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[12.] & (\beta,\ -\alpha,\ \delta,\ -\gamma)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[13.] & (\delta,\ \gamma,\ -\beta,\ -\alpha)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[14.] & (\gamma,\ -\delta,\ -\alpha,\ \beta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[15.] & (\gamma,\ \delta,\ -\alpha,\ -\beta)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0,\\
[16.] & (\delta,\ -\gamma,\ -\beta,\ \alpha)(X,\ Y,\ Z,\ W) = 0.
\end{array}
$$

I repeat in a new order the sets of coefficients which belong to the several squares, viz. these are

$$
\begin{array}{lll}
(1.) & P^2 & (\alpha,\ -\beta,\ -\gamma,\ \delta),\\
(2.) & Q_1^2 & (\beta,\ \alpha,\ -\delta,\ -\gamma),\\
(3.) & Q^2 & (\beta,\ -\alpha,\ -\delta,\ \gamma),\\
(4.) & P_1^2 & (\alpha,\ \beta,\ -\gamma,\ -\delta),\\
(5.) & R_2^2 & (\gamma,\ -\delta,\ \alpha,\ -\beta),\\
(6.) & S_3^2 & (\delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha),\\
(7.) & S_2^2 & (\delta,\ -\gamma,\ \beta,\ -\alpha),\\
(8.) & R_3^2 & (\gamma,\ \delta,\ \alpha,\ \beta),\\
(9.) & P_2^2 & (\alpha,\ -\beta,\ \gamma,\ -\delta),\\
(10.) & Q_3^2 & (\beta,\ \alpha,\ \delta,\ \gamma),
\end{array}
$$

(11.)	Q_2^2	$(\beta,$	$-\alpha,$	$\delta,$	$-\gamma),$
(12.)	P_3^2	$(\alpha,$	$\beta,$	$\gamma,$	$\delta),$
(13.)	R^2	$(\gamma,$	$-\delta,$	$-\alpha,$	$\beta),$
(14.)	S_1^2	$(\delta,$	$\gamma,$	$-\beta,$	$-\alpha),$
(15.)	S_2^2	$(\delta,$	$-\gamma,$	$-\beta,$	$\alpha),$
(16.)	R_1^2	$(\gamma,$	$\delta,$	$-\alpha,$	$-\beta),$

and I remark that if we connect these with the multipliers $(Y, -X, W, -Z)$, we obtain (except that there is sometimes a reversal of all the signs) the *same* linear functions of (X, Y, Z, W) as are written down under the same numbers in square brackets above, thus (1.) gives

$(\alpha, -\beta, -\gamma, \delta)(Y, -X, W, -Z)$, which is $(\beta, \alpha, -\delta, -\gamma)(X, Y, Z, W), =[1.]$;

and so (2.) gives

$(\beta, \alpha, -\delta, -\gamma)(Y, -X, W, -Z)$, which is $(-\alpha, \beta, \gamma, -\delta)(X, Y, Z, W)$,

or reversing the signs

$$(\alpha, -\beta, -\gamma, \delta)(X, Y, Z, W), = [2.].$$

Comparing with the geometrical theory in *Kummer*'s Memoir, it appears that the several systems of values (1.), (2.), ... (16.) are the coordinates of the nodes of a 16-nodal quartic surface, which nodes lie by sixes in the singular tangent planes, in the manner expressed by the foregoing scheme, wherein each top number may refer to a singular tangent plane, and then the numbers below it show the nodes in this plane: or else the top number may refer to a node, and then the numbers below it show the singular planes through this node.

And from what precedes we have the general result, the 16 squared double Θ-functions correspond (one to one) to the nodes of a 16-nodal quartic surface, in such wise that linearly connected squared functions correspond to nodes in the same singular tangent plane.

The question arises, to find the equation of the 16-nodal quartic surface, having the foregoing nodes and singular tangent planes: starting from one of the irrational forms, say

$$\sqrt{A[1][5]}+\sqrt{B[2][6]}+\sqrt{C[3][7]} = 0,$$

the coefficients A, B, C are readily determined, and the result written at

full length is

$$\sqrt{2(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)(\beta X+\alpha Y-\delta Z-\gamma W)(\delta X+\gamma Y+\beta Z+\alpha W)}$$
$$+\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha X-\beta Y-\gamma Z+\delta W)(\gamma X-\delta Y+\alpha Z-\beta W)}$$
$$+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha X+\beta Y-\gamma Z-\delta W)(\gamma X+\delta Y+\alpha Z+\beta W)} = 0.$$

It is a somewhat long, but nevertheless interesting piece of algebraical work to rationalise the foregoing equation: the result is

$$(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2)(\gamma^2\alpha^2-\beta^2\delta^2)(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2).(X^4+Y^4+Z^4+W^4)$$
$$+(\gamma^2\alpha^2-\beta^2\delta^2)(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(\alpha^4+\delta^4-\beta^4-\gamma^4).(Y^2Z^2+X^2W^2)$$
$$+(\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2)(\beta^4+\delta^4-\gamma^4-\alpha^4).(Z^2X^2+Y^2W^2)$$
$$+(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2)(\gamma^2\alpha^2-\beta^2\delta^2)(\gamma^4+\delta^4-\alpha^4-\beta^4).(X^2Y^2+Z^2W^2)$$
$$-2\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)(\beta^2+\delta^2-\alpha^2-\gamma^2)(\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2)XYZW=0;$$

or if we write for shortness

$$L=\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2,\quad F=\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2,$$
$$M=\gamma^2\alpha^2-\beta^2\delta^2,\quad G=\beta^2+\delta^2-\gamma^2-\alpha^2,$$
$$N=\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2,\quad H=\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2,$$
$$\varDelta=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

then this is

$$LMN(X^4+Y^4+Z^4+W^4)$$
$$+MN(F\varDelta+2L)(Y^2Z^2+X^2W^2)$$
$$+NL(G\varDelta+2M)(Z^2X^2+Y^2W^2)$$
$$+LM(H\varDelta+2N)(X^2Y^2+Z^2W^2)$$
$$-2\alpha\beta\gamma\delta FGH\varDelta.XYZW = 0.$$

It may be easily verified that any one of the sixteen points, for instance $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, is a node of the surface: thus to show that the derived function in respect to X, vanishes for $X, Y, Z, W=\alpha, \beta, \gamma, \delta$; the derived function here divides by 2α, and omitting this factor, the equation to be verified is

$$LMN.2\alpha^2+MN(F\varDelta+2L)\delta^2+NL(G\varDelta+2M)\gamma^2+LM(H\varDelta+2N)\beta^2-\beta^2\gamma^2\delta^2FGH\varDelta=0,$$

viz. the whole coefficient of LMN is $2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$, $=2\varDelta$; hence throwing out the factor $\varDelta$, the equation becomes

$$2LMN+MNF\delta^2+NLG\gamma^2+LMH\beta^2-\beta^2\gamma^2\delta^2FGH = 0.$$

Writing this in the form

$$L(2MN+NG\gamma^2+MH\beta^2) = F\delta^2(GH\beta^2\gamma^2-MN)$$

we find without difficulty $GH\beta^2\gamma^2 - MN = -(\beta^2-\gamma^2)^2 L$; hence throwing out the factor L, the equation becomes

$$N(2M+G\gamma^2)+MH\beta^2+F\delta^2(\beta^2-\gamma^2)^2 = 0;$$

we find

$$\begin{aligned} MH\beta^2+F\delta^2(\beta^2-\gamma^2)^2 &= (\alpha^2\beta^2-\gamma^2\delta^2)(2\beta^2\delta^2-\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\delta^2)+\gamma^4), \\ &= N(2\beta^2\delta^2-\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\delta^2)+\gamma^4), \end{aligned}$$

or throwing out the factor N, the equation becomes

$$2M+G\gamma^2+2\beta^2\delta^2-\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\delta^2)+\gamma^4 = 0,$$

which is at once verified: and similarly it can be shown that the other derived functions vanish, and the point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ is thus a node.

The surface seems to be the general 16-nodal surface, viz. replacing X, Y, Z, W by any linear functions of four coordinates we have thus $4.4-1$, $=15$ constants, and the equation contains besides the three ratios $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, that is in all 18 constants: the general quartic surface has 34 constants, and therefore the general 16-nodal surface $34-16$, $=18$ constants: but the conclusion requires further examination.

Göpel and ***Rosenhain*** each connect the theory with that of the ultra-elliptic functions with the radical $\sqrt{X}$, $=\sqrt{x.1-x.1-lx.1-mx.1-nx}$; viz. it appears by their formulae (more completely by those of ***Rosenhain***) that the ratios of the 16 squares can be expressed rationally in terms of the two variables x, x', and the radicals $\sqrt{X}$, $\sqrt{X'}$ (X' the same function of x' that X is of x). We may instead of the preceding form take X to be the general quintic function, or what is better take it to be the sextic function $a-x.b-x.c-x.d-x.e-x.f-x$; and we thus obtain a remarkable algebraical theorem: viz. I say that the 16 squares each divided by a proper constant factor are proportional to six functions of the form

$$a-x.a-x',$$

and ten functions of the form

$$\frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x'.e-x'.f-x'} - \sqrt{a-x'.b-x'.c-x'.d-x.e-x.f-x}\}^2,$$

and consequently that these 16 algebraical functions of x, x' are linearly connected in the manner of the 16 squares; viz. there exist 16 sixes, such

that in each six, the remaining three functions can be linearly expressed in terms of any three of them.

To further develop the theory, I remark that the six functions may be represented by A, B, C, D, E, F respectively: any one of the ten functions would be properly represented by $ABC.DEF$, but isolating one letter F, and writing DE to denote DEF, this function $ABC.DEF$ may be represented simply as DE; and the ten functions thus are AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Writing for shortness a, b, c, d, e, f, to denote $a-x$, $b-x$, etc. and similarly a', b', c', d', e', f', to denote $a-x'$, $b-x'$, etc. we thus have

$$(13.)\quad A = aa',$$

$$(9.)\quad B = bb',$$

$$(7.)\quad C = cc',$$

$$(8.)\quad D = dd',$$

$$(6.)\quad E = ee', \qquad (=E),$$

$$(1.)\quad F = ff', \qquad (=F),$$

$$(3.)\quad DE = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{abcd'e'f'}-\sqrt{a'b'c'def}\}^2, \quad (=\bar{D}),$$

$$(4.)\quad CE = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{abdc'e'f'}-\sqrt{a'b'd'cef}\}^2, \quad (=\bar{E}),$$

$$(2.)\quad CD = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{abec'd'f'}-\sqrt{a'b'e'cdf}\}^2,$$

$$(14.)\quad BE = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{acdb'e'f'}-\sqrt{a'c'd'bef}\}^2 \quad (=\bar{B}),$$

$$(16.)\quad BD = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{aceb'd'f'}-\sqrt{a'c'e'bdf}\}^2,$$

$$(15.)\quad BC = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{adeb'c'f'}-\sqrt{a'd'e'bcf}\}^2,$$

$$(10.)\quad AE = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{bcda'e'f'}-\sqrt{b'c'd'aef}\}^2, \quad (=\bar{A}),$$

$$(12.)\quad AD = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{bcea'd'f'}-\sqrt{b'c'e'adf}\}^2,$$

$$(11.)\quad AC = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{bdea'c'f'}-\sqrt{b'd'e'acf}\}^2,$$

$$(5.)\quad AB = \frac{1}{(x-x')^2}\{\sqrt{cdea'b'f'}-\sqrt{c'd'e'abf}\}^2,$$

where the numbers are in accordance with the foregoing scheme; viz. the

scheme becomes

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)	(13.)	(14.)	(15.)	(16.)
F	*CD*	*DE*	*CE*	*AB*	*E*	*C*	*D*	*B*	*AE*	*AC*	*AD*	*A*	*BE*	*BC*	*BD*
B	*AE*	*AC*	*AD*	*A*	*BE*	*BC*	*BD*	*F*	*CD*	*DE*	*CE*	*AB*	*E*	*C*	*D*
A	*BE*	*BC*	*BD*	*B*	*AE*	*AC*	*AD*	*AB*	*E*	*C*	*D*	*F*	*CD*	*DE*	*CE*
D	*C*	*E*	*AB*	*CE*	*DE*	*CD*	*F*	*BD*	*BC*	*BE*	*A*	*AD*	*AC*	*AE*	*B*
C	*D*	*AB*	*E*	*DE*	*CE*	*F*	*CD*	*BC*	*BD*	*A*	*BE*	*AC*	*AD*	*B*	*AE*
E	*AB*	*D*	*C*	*CD*	*F*	*CE*	*DE*	*DE*	*A*	*BD*	*BC*	*AE*	*B*	*AD*	*AC*.

There is of course the six A, B, C, D, E, F; for each of these is a linear function of $1, x+x', xx'$, and there is thus a linear relation between any four of them. It would at first sight appear that the remaining sixes were of two different forms, A, B, AB, CE, CD, DE, and F, A, AB, AC, AD, AE; but these are really identical, for taking *any* two letters E, F, the six is E, F, AE, BE, CE, DE, or as this might be written E, F, AEF, BEF, CEF, DEF, where AEF means $BCD.AEF$ etc.; and we thus obtain each of the remaining fifteen sixes. The six just referred to, viz. E, F, AE, BE, CE, DE, or changing the notation say $E, F, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ (as indicated in the table) thus represents any one of the sixes other than the rational six A, B, C, D, E, F; and there is no difficulty in actually finding each of the fifteen relations between four functions of the six in question, $E, F, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. It is to be observed that every such function as $\bar{A}$ contains the same irrational part $\frac{2}{(x-x')^2}\sqrt{abcdefa'b'c'd'e'f'}$, and that the linear relations involve therefore only the differences $\bar{A}-\bar{B}$, $\bar{A}-\bar{C}$, etc., which are rational. Proceeding to calculate these differences, we have for instance

$$\bar{C}-\bar{D} = \frac{1}{(x-x')^2}(cefa'b'd'+c'e'f'abd-defa'b'c'-d'e'f'abc)$$

$$= \frac{1}{(x-x')^2}(cd'-c'd)(efa'b'-e'f'ab),$$

or substituting for a, a', etc. their values $a-x, a-x'$, etc. we have

$$cd'-c'd = (x-x')(c-d),$$

$$efa'b'-e'f'ab = (x-x')\begin{vmatrix} 1, & x+x', & xx' \\ 1, & a+b, & ab \\ 1, & e+f, & ef \end{vmatrix},$$

or say for shortness

$$= (x-x')[xx'abef].$$

We have therefore

$$\bar{C}-\bar{D} = (c-d)[xx'abef],$$

and in like manner we obtain the equations

$$\bar{B}-\bar{C} = (b-c)[xx'adef], \quad \bar{A}-\bar{D} = (a-d)[xx'bcef],$$
$$\bar{C}-\bar{A} = (c-a)[xx'bdef], \quad \bar{B}-\bar{D} = (b-d)[xx'caef],$$
$$\bar{A}-\bar{B} = (a-b)[xx'cdef], \quad \bar{C}-\bar{D} = (c-d)[xx'abef].$$

It is now easy to form the system of formulae

E	F	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$	
		$ae.af.bcd$	$-be.bf.cda$	$+ce.cf.dab$	$-de.df.abc$	$=0$
$ad.bf.cf$	$-ad.be.ce$	$+ef$			$-ef$	$=0$
$bd.cf.af$	$-bd.ce.ae$		$+ef$	$-ef$		$=0$
$cd.af.bf$	$-cd.ae.be$			$+ef$	$-ef$	$=0$
$bc.af.df$	$-bc.ae.de$		$+ef$	$-ef$		$=0$
$ca.bf.df$	$-ca.be.de$	$-ef$		$+ef$		$=0$
$ab.cf.df$	$-ab.ce.de$	$+ef$	$-ef$			$=0$
$-af.bcd$			$+be.cd$	$+ce.db$	$+de.bc$	$=0$
$-bf.cda$		$+ae.cd$		$+ce.da$	$+de.ac$	$=0$
$-cf.dab$		$+ae.bd$	$+be.da$		$+de.ab$	$=0$
$-df.abc$		$+ae.bc$	$+be.ca$	$+ce.ab$		$=0$
	$-ae.bcd$		$+bf.cd$	$+cf.db$	$+df.bc$	$=0$
	$-be.cda$	$+af.cd$		$+cf.da$	$+df.ac$	$=0$
	$-ce.dab$	$+af.bd$	$+bf.da$		$+df.ab$	$=0$
	$-df.abc$	$+af.bc$	$+bf.ca$	$+cf.ab$		$=0,$

where for shortness ab, ac, etc. are written to denote $a-b$, $a-c$, etc.; also abc, etc. to denote $(b-c)(c-a)(a-b)$, etc.: the equations contain all of them only the differences of $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$; thus the first equation is equivalent to

$$ae.af.bcd(\bar{A}-\bar{D})-be.bf.cde(\bar{B}-\bar{D})+ce.cf.dab(\bar{C}-\bar{D}) = 0$$

and so in other cases.

Cambridge, 14th March 1877.

Further investigations on the double ϑ-functions.

(By Prof. *A. Cayley* at Cambridge.)

I consider six letters

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f;$$

a duad ab not containing f may be completed into the triad abf, and then into the double triad $abf.cde$; there are in all ten double triads, represented by the duads

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ bc,\ bd,\ be,\ cd,\ ce,\ de,$$

and the whole number of letters and of double triads is $=16$.

Taking x, x' as variables, I form sixteen functions, viz. these are

$$[a] = a-x.a-x',$$

$$[ab] = \frac{1}{(x-x')^2}\left\{\sqrt{\frac{a-x\,.b-x\,.f-x}{c-x'.d-x'.e-x'}} \pm \sqrt{\frac{a-x'.b-x'.f-x'}{c-x\,.d-x\,.e-x}}\right\}^2,$$

where the function under each radical sign is the product of six factors, the arrangement in two lines being for convenience only: the sign $\pm$ has the same value in all the functions, and it will be observed that the irrational part is

$$= \pm\frac{2}{(x-x')^2}\sqrt{\frac{a-x\,.b-x\,.c-x\,.d-x\,.e-x\,.f-x}{a-x'.b-x'.c-x'.d-x'.e-x'.f-x'}},$$

viz. this has the same value in all the functions.

The general property of the double ϑ-functions is that the squares of the sixteen functions are proportional to constant multiples of the sixteen functions $[a]$, $[ab]$; but this theorem may be presented in a much more definite form, viz. we can determine, and that very simply, the actual expressions for the constant factors; and so enunciate the theorem as follows; the squares of the sixteen double ϑ-functions are proportional to sixteen functions $-\{a\}$, $+\{ab\}$; where, in a notation about to be explained,

$$\{a\} = \sqrt{a}\,[a], \quad \{ab\} = \sqrt{ab}\,[ab].$$

Here in the radical $\sqrt{a}$, a is to be considered as standing in the first place for the pentad $bcdef$, which is to be interpreted as a product of differences, $= bc.bd.be.bf.cd.ce.cf.de.df.ef$ (where bc, bd, etc. denote the differences $b-c$, $b-d$, etc.). Similarly, in the radical $\sqrt{ab}$, ab is to be considered as standing in the first instance for the double triad $abf.cde$, which is to be

interpreted as a product of differences, $= ab.af.bf.cd.ce.de$ (where ab, af, etc. denote the differences $a-b$, $a-f$, etc.)

It is convenient to consider a, b, c, d, e, f as denoting real magnitudes taken in decreasing order: in all the products $bcdef$, etc., and in each term abf or cde of a product $abf.cde$, the letters are to be written in alphabetical order; the differences bc, bd, etc., ab, af, etc. which present themselves in the several products are thus all of them positive; and the radicals, being all of them the roots of positive quantities, may themselves be taken to be positive.

We have to consider the values of the functions $[a]$, $[ab]$, or $\{a\}$, $\{ab\}$, in the case where the variables x, x' become equal to any two of the letters a, b, c, d, e, f; it is clearly the same thing whether we have for instance $x = b$, $x' = c$, or $x = c$, $x' = b$, etc.: we have therefore to consider for x, x' the fifteen values $ab, ac, \ldots af, \ldots ef$; there is besides a sixteenth set of values x, x' each infinite, without any relation between the infinite values.

Taking this case first, x, x' each infinite, and in $[ab]$, etc. the sign $\pm$ to be $+$, we have

$$[a] = xx', \quad [ab] = \frac{4x^2x'^2}{(x-x')^2}$$

or, attending only to the ratios of these values,

$$[a] = 1, \quad [ab] = \frac{4x^2x'^2}{(x-x')^2},$$

where $\frac{4x^2x'^2}{(x-x')^2}$ is infinite, and the values may finally be written

$$[a] = 0, \quad [ab] = 1;$$

whence also, for x, x' infinite,

$$\{a\} = 0, \quad \{ab\} = \sqrt{ab}$$

the radical $\sqrt{ab}$ being understood as before.

Suppose next that x, x' denote any two of the letters, for instance a, b; then two of the functions $[a]$ vanish, viz. these are $[a]$, $[b]$, but the remaining four functions acquire determinate values; and moreover four of the functions $[ab]$ vanish, viz. these are $[ab]$, $[cd]$, $[ce]$, $[de]$, for each of which the xx' letters a, b occur in the same triad (the double triads for the four functions are in fact $abf.cde$, $cdf.abe$, $cef.abd$, $def.abc$); but the other six functions $[ab]$, for which the letters a, b occur in separate triads, acquire determinate values.

It is important to attend to the signs: for example if x, $x' = b$, e, we have

$$[c] = ce.cb, \quad = -bc.ce$$

$$[ce] = \frac{1}{(be)^2}\,\frac{cb.eb.fb}{ae.be.de}, \quad = -\frac{cb.fb}{ae.de}, \quad = -\frac{bc.bf}{ae.de},$$

Table I, of the values of [a], [ab], etc.

x, $x' = \infty\infty$		ab	ac	ad	ae	af	bc	bd
[a]	0	0	0	0	0	0	$+ab.ac$	$+ab.ad$
[b]	0	0	$-ab.bc$	$-ab.bd$	$-ab.be$	$-ab.bf$	0	0
[c]	0	$+ac.bc$	0	$-ac.cd$	$-ac.ce$	$-ac.cf$	0	$-bc.cd$
[d]	0	$+ad.bd$	$+ad.cd$	0	$-ad.de$	$-ad.df$	$+bd.cd$	0
[e]	0	$+ae.be$	$+ae.ce$	$+ae.de$	0	$-ae.ef$	$+be.ce$	$+be.de$
[f]	0	$+af.bf$	$+af.cf$	$+af.df$	$+af.ef$	0	$+bf.cf$	$+bf.df$
[ab]	$+abf.cde$	0	$+\frac{ad.ae}{bc.cf}$	$+\frac{ac.ae}{bd.df}$	$+\frac{ac.ad}{be.ef}$	0	$+\frac{ac.bd}{be.cf}$	$+\frac{ad.bc}{be.df}$
[ac]	$+acf.bde$	$-\frac{ad.ae}{bc.bf}$	0	$+\frac{ab.ae}{cd.cf}$	$+\frac{ab.ad}{ce.ef}$	0	$+\frac{ab.bf}{cd.ce}$	0
[ad]	$+adf.bce$	$-\frac{ac.ae}{bd.bf}$	$-\frac{ab.ae}{cd.cf}$	0	$+\frac{ab.ac}{de.ef}$	0	0	$-\frac{ab.bf}{cd.de}$
[ae]	$+aef.bcd$	$-\frac{ac.ae}{be.bf}$	$-\frac{ab.ad}{ce.cf}$	$-\frac{ab.ac}{de.df}$	0	0	0	0
[bc]	$+bcf.ade$	$-\frac{ac.af}{bd.be}$	$-\frac{ab.af}{cd.ce}$	0	0	$-\frac{ab.ac}{df.ef}$	0	$-\frac{ab.be}{cd.df}$
[bd]	$+bdf.ace$	$-\frac{ad.af}{bc.be}$	0	$+\frac{ab.af}{cd.de}$	0	$-\frac{ab.ad}{cf.ef}$	$+\frac{ab.be}{cd.cf}$	0
[be]	$+bef.acd$	$-\frac{ae.af}{bc.bd}$	0	0	$-\frac{ab.af}{ce.de}$	$-\frac{ab.ae}{cf.df}$	$+\frac{ab.bd}{ce.cf}$	$+\frac{ab.bc}{de.df}$
[cd]	$+cdf.abe$	0	$+\frac{ad.af}{bc.ce}$	$+\frac{ac.af}{bd.de}$	0	$-\frac{ac.ad}{bf.ef}$	$+\frac{ac.bd}{bf.ce}$	$+\frac{ad.bc}{bf.de}$
[ce]	$+cef.abd$	0	$+\frac{ae.af}{bc.cd}$	0	$-\frac{ac.af}{be.de}$	$-\frac{ac.ae}{bf.df}$	$+\frac{ac.be}{bf.cd}$	0
[de]	$+def.abc$	0	0	$-\frac{ae.af}{bc.cd}$	$-\frac{ad.af}{be.ce}$	$-\frac{ad.ae}{bf.cf}$	0	$-\frac{ad.be}{bf.cd}$

where the *be, ce* etc. denote differences; $[ce]$ is the product of four differences: the arrangement in two lines is for convenience only.

We thus obtain the series of values of $[a]$, $[ab]$, etc. which although only required as subsidiary to the determination of the corresponding values of $\{a\}$, $\{ab\}$, I nevertheless give in a table.

for the sixteen special values of x, x'.

be	*bf*	*cd*	*ce*	*cf*	*de*	*df*	*ef*
+ab.ae	+ab.af	+ac.ad	+ac.ae	+ac.af	+ad.ae	+ad.af	+ae.af
0	0	+bc.bd	+bc.be	+bc.bf	+bd.be	+bd.bf	+be.bf
−bc.ce	−bc.cf	0	0	0	+cd.ce	+cd.df	+ce.cf
−bd.de	−bd.bf	0	−cd.de	−cd.df	0	0	+de.df
0	−be.ef	+ce.de	0	−ce.ef	0	−de.ef	0
+bf.ef	0	+cf.df	+cf.ef	0	+df.ef	0	0
+ ac.bc bd.ef	0	0	0	− ac.bc df.ef	0	− ad.bd cf.ef	− ae.be cf.df
0	+ ab.bc df.ef	− ad.bc ce.df	− ae.bc cd.ef	0	0	− ad.bf cd.ef	− ae.bf ce.df
0	+ ab.bd cf.ef	− ac.bd cf.de	0	+ ac.bf cd.ef	+ ae.bd cd.ef	0	− ae.bf cf.de
+ ab.bf ce.de	+ ab.be cf.df	0	+ ac.be cf.de	+ ac.bf ce.df	+ ad.be ce.df	+ ad.bf cf.de	0
− ab.bd ce.ef	0	− ac.bd ce.df	− ac.be cd.ef	0	0	− af.bd cd.ef	− af.be ce.df
− ad.bc de.ef	0	− ad.bc cf.de	0	+ af.bc cd.ef	+ ad.be cd.ef	0	− af.be cf.de
0	0	0	+ ae.bc cf.de	+ af.bc ce.df	+ ae.bd ce.df	+ af.bd cf.de	0
0	− af.bc bd.ef	0	+ ac.bc de.ef	0	+ ad.bd ce.ef	0	− af.bf ce.de
− ae.bc bf.de	− af.bc be.df	− ac.bc de.df	0	0	+ ae.be cd.df	+ af.bf cd.de	0
− ae.bd bf.ce	− af.bd be.cf	− ad.bd ce.cf	− ae.be cd.cf	− af.bf cd.ce	0	0	0

The signs are given as they were actually obtained, but as we are concerned only with the ratios of the functions, it is allowable to change all the signs in any column: and it appears that there are four columns in each of which the signs are or can be made all $+$; whereas in each of the remaining twelve columns the signs are or can be made six of them $+$, the other four $-$.

To pass to the values of $|a|$, $|ab|$, etc.; we have for example, from the ab column of the foregoing table,

$$|c| = +\sqrt{c}.ac.bc,$$
$$|d| = +\sqrt{d}.ad.bd,$$
$$\vdots$$
$$|ac| = -\sqrt{ac}.\frac{ac.ae}{bc.bf},$$
$$\vdots$$

where (since the radicals are all positive) the signs are correct: substituting for the quantities under the radical signs their full values, and squaring the rational parts in order to bring them also under the radical signs, this is

$$|c| = +\sqrt{ab.ad.ae.af.bd.be.bf.de.df.ef.ac^2.bc^2},$$
$$|d| = +\sqrt{ab.ac.ae.af.bc.be.bf.ce.cf.ef.ad^2.bd^2},$$
$$\vdots$$
$$|ac| = -\sqrt{ac.af.cf.bd.be.de.ac^2.ae^2.bc^2.bf^2}$$

where all the expressions of this (the ab-column) have a common factor, $ac.ad.ae.af.bc.bd.be.bf$: and omitting this factor we find

$$|c| = +\sqrt{ab.ac.bc.de.df.ef},$$
$$|d| = +\sqrt{ab.ad.bd.ce.cf.ef},$$
$$\vdots$$
$$|ac| = -\sqrt{ad.ae.de.bc.bf.cf},$$

viz. recurring to the foregoing condensed notation, this is

$$|c| = +\sqrt{de},$$
$$|d| = +\sqrt{ce},$$
$$\vdots$$
$$|ac| = -\sqrt{bc},$$

and in fact, the terms in the several columns have only the ten values $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, etc. each with its proper sign. I repeat the meaning of the notation: ab stands in the first instance for the double triad $abf.cde$, and then this denotes a product of differences $ab.af.bf.cd.ce.de$. We have thus the following table in which I have in several cases changed the signs of entire columns.

Table II of the functions $\{a\}$, $\{ab\}$, etc. for the sixteen special values of x, x'.

$=\infty\infty\infty$	ab	ac	ad	ae	af	bc	bd	be	bf	cd	ce	cf	de	df	ef
0	0	0	0	0	0	$+\sqrt{de}$	$+\sqrt{ce}$	$-\sqrt{cd}$	$-\sqrt{ab}$	$-\sqrt{be}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{ad}$	$-\sqrt{ae}$
0	0	$-\sqrt{de}$	$-\sqrt{ce}$	$+\sqrt{cd}$	$+\sqrt{ab}$	0	0	0	0	$-\sqrt{ae}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{bd}$	$-\sqrt{be}$
0	$-\sqrt{de}$	0	$-\sqrt{be}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{ac}$	0	$-\sqrt{ae}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{bc}$	0	0	0	$+\sqrt{ab}$	$+\sqrt{cd}$	$-\sqrt{ce}$
0	$-\sqrt{ce}$	$+\sqrt{be}$	0	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{ae}$	0	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{bd}$	0	$-\sqrt{ab}$	$-\sqrt{cd}$	0	0	$-\sqrt{de}$
0	$-\sqrt{cd}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{bc}$	0	$+\sqrt{ae}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{ac}$	0	$+\sqrt{be}$	$-\sqrt{ab}$	0	$-\sqrt{ce}$	0	$-\sqrt{de}$	0
0	$-\sqrt{ab}$	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{ad}$	$-\sqrt{ae}$	0	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{bd}$	$-\sqrt{be}$	0	$-\sqrt{cd}$	$+\sqrt{ce}$	0	$+\sqrt{de}$	0	0
$+\sqrt{ab}$	0	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{bd}$	$-\sqrt{be}$	0	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{ad}$	$-\sqrt{ae}$	0	0	0	$-\sqrt{de}$	0	$-\sqrt{ce}$	$+\sqrt{cd}$
$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{bc}$	0	$+\sqrt{cd}$	$-\sqrt{ce}$	0	$+\sqrt{ab}$	0	0	$-\sqrt{de}$	$+\sqrt{ad}$	$-\sqrt{ae}$	0	0	$-\sqrt{be}$	$+\sqrt{bd}$
$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{bd}$	$-\sqrt{cd}$	0	$-\sqrt{de}$	0	0	$-\sqrt{ab}$	0	$-\sqrt{ce}$	$+\sqrt{ac}$	0	$+\sqrt{be}$	$+\sqrt{ae}$	0	$+\sqrt{bc}$
$+\sqrt{ae}$	$+\sqrt{be}$	$-\sqrt{ce}$	$-\sqrt{de}$	0	0	0	0	$-\sqrt{ab}$	$-\sqrt{cd}$	0	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{bc}$	0
$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{ac}$	$-\sqrt{ab}$	0	0	$+\sqrt{de}$	0	$-\sqrt{cd}$	$+\sqrt{ce}$	0	$+\sqrt{bd}$	$-\sqrt{be}$	0	0	$-\sqrt{ae}$	$+\sqrt{ad}$
$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{ad}$	0	$+\sqrt{ab}$	0	$+\sqrt{ce}$	$+\sqrt{cd}$	0	$+\sqrt{de}$	0	$+\sqrt{bc}$	0	$+\sqrt{ae}$	$+\sqrt{be}$	0	$+\sqrt{ac}$
$+\sqrt{be}$	$+\sqrt{ae}$	0	0	$+\sqrt{ab}$	$+\sqrt{cd}$	$+\sqrt{ce}$	$+\sqrt{de}$	0	0	0	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{ac}$	0
$+\sqrt{cd}$	0	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{ac}$	0	$+\sqrt{be}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{bc}$	0	$+\sqrt{ae}$	0	$+\sqrt{de}$	0	$+\sqrt{ce}$	0	$+\sqrt{ab}$
$+\sqrt{ce}$	0	$+\sqrt{ae}$	0	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{be}$	0	$+\sqrt{bc}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{de}$	0	0	$+\sqrt{cd}$	$+\sqrt{ab}$	0
$+\sqrt{de}$	0	0	$-\sqrt{ae}$	$+\sqrt{ad}$	$+\sqrt{bc}$	0	$-\sqrt{be}$	$+\sqrt{bd}$	$+\sqrt{ac}$	$+\sqrt{ce}$	$-\sqrt{cd}$	$-\sqrt{ab}$	0	0	0

Referring now to *Göpel*'s memoir, this Journ. t. 35 (1847) pp. 277—312, we have the sixteen double ϑ-functions

$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3;\ iQ,\ Q_1,\ iQ_2,\ Q_3;\ iR,\ iR_1,\ R_2,\ R_3;\ S,\ iS_1,\ iS_2,\ S_3,$

where the six functions affected with the $i(=\sqrt{-1})$ are odd functions, vanishing for the values $u=0,\ u'=0$ of the arguments; it is convenient to take $\infty,\ \infty$ as the values of $x,\ x'$ corresponding to these values $u=0,\ u'=0$: the expressions $\{a\}$ will thus correspond to the six squares $-Q^2,\ -Q_2^2,\ -R^2,\ -R_1^2,\ -S_1^2,\ -S_2^2$, and the expressions $\{ab\}$ to the remaining ten squares $P^2,\ P_1^2,\ \ldots\ S_3^2$; and after some *tâtonnement,* I succeed in establishing the correspondence as follows

$$S_2^2,\ S_1^2,\ R_1^2,\ R^2,\ Q^2,\ Q_2^2,\ Q_1^2,\ P_1^2,\ P^2,\ S^2,\ P_2^2,\ P_3^2,\ S_3^2,\ Q_3^2,\ R_3^2,\ R_2^2,$$
$$=\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\},\ \{f\},\ \{ab\},\ \{ac\},\ \{ad\},\ \{ae\},\ \{bc\},\ \{bd\},\ \{be\},\ \{cd\},\ \{ce\},\ \{de\},$$

viz. the sixteen squared double ϑ-functions are proportional to the sixteen expressions $-\{a\},\ +\{ab\}$, as hereby appearing.

We have, *Göpel* p. 283, a table showing how the ratios of the double ϑ-functions are altered, when the arguments are increased by the quarter-periods $A,\ B,\ A+B,\ K,\ L,\ K+L$ (that is when $u,\ u'$ are simultaneously changed into $u+A,\ u'+A'$ or into $u+B,\ u'+B'$ etc.): if instead, we con-

Table III of the sixteen forms of

	0	A	B	$A+B$	K	$K+A$	$K+B$	$K+A+B$
$-S_2^2$	$-S_2^2=a$	$-S_3^2=-be$	$-S^2=-ae$	$-S_1^2=b$	$+R_2^2=de$	$R_3^2=ce$	$R^2=-d$	$R_1^2=-c$
$-S_1^2$	$-S_1^2=b$	$-S^2=-ae$	$-S_3^2=-be$	$-S_2^2=a$	$-R_1^2=c$	$-R^2=d$	$-R_3^2=-ce$	$-R_2^2=-de$
$-R_1^2$	$-R_1^2=c$	$-R^2=+d$	$-R_3^2=-ce$	$-R_2^2=-de$	$-S_1^2=b$	$-S^2=-ae$	$-S_3^2=-be$	$-S_2^2=a$
$-R^2$	$-R^2=d$	$-R_1^2=+c$	$-R_2^2=-de$	$-R_3^2=-ce$	$S^2=ae$	$S_1^2=-b$	$S_2^2=-a$	$S_3^2=be$
$-Q^2$	$-Q^2=e$	$-Q_1^2=-ab$	$-Q_2^2=+f$	$-Q_3^2=-cd$	$P^2=ad$	$P_1^2=ac$	$P_2^2=bc$	$P_3^2=bd$
$-Q_2^2$	$-Q_2^2=f$	$-Q_3^2=-cd$	$-Q^2=+e$	$-Q_1^2=-ab$	$P_2^2=bc$	$P_3^2=bd$	$P^2=ad$	$P_1^2=ac$
Q_1^2	$Q_1^2=ab$	$Q^2=-e$	$Q_3^2=cd$	$Q_2^2=-f$	$P_1^2=ac$	$P^2=ad$	$P_3^2=bd$	$P_2^2=bc$
P_1^2	$P_1^2=ac$	$P^2=ad$	$P_3^2=bd$	$P_2^2=bc$	$Q_1^2=ab$	$Q^2=-e$	$Q_3^2=cd$	$Q_2^2=-f$
P^2	$P^2=ad$	$P_1^2=ac$	$P_2^2=bc$	$P_3^2=bd$	$-Q^2=e$	$-Q_1^2=-ab$	$-Q_2^2=f$	$-Q_3^2=-c$[illegible]
S^2	$S^2=ae$	$S_1^2=-b$	$S_2^2=-a$	$S_3^2=be$	$-R^2=d$	$-R_1^2=c$	$-R_2^2=-de$	$-R_3^2=-c$[illegible]
P_2^2	$P_2^2=bc$	$P_3^2=bd$	$P^2=ad$	$P_1^2=ac$	$-Q_2^2=f$	$-Q_3^2=-cd$	$-Q^2=e$	$-Q_1^2=-a$[illegible]
P_3^2	$P_3^2=bd$	$P_2^2=bc$	$P_1^2=ac$	$P^2=ad$	$Q_3^2=cd$	$Q_2^2=-f$	$Q_1^2=ab$	$Q^2=-e$
S_3^2	$S_3^2\ be$	$S_2^2=-a$	$S_1^2=-b$	$S^2=ae$	$R_3^2=ce$	$R_2^2=de$	$R_1^2=c$	$R^2=-d$
Q_3^2	$Q_3^2\ cd$	$Q_2^2=-f$	$Q_1^2=ab$	$Q^2=-e$	$P_3^2=bd$	$P_2^2=bc$	$P_1^2=ac$	$P^2=a$[illegible]
R_3^2	$R_3^2\ ce$	R_2^2-de	$R_1^2=-c$	$R^2=-d$	$S_3^2=be$	$S_2^2=-a$	$S_1^2=-b$	$S^2=a$[illegible]
R_2^2	R_2^2-de	$R_3^2=ce$	$R^2=-d$	$R_1^2=-c$	$-S_2^2=a$	$-S_3^2=-be$	$-S^2=-ae$	$-S_1^2=-b$
	$\infty\infty$	cd	ef	ab	bc	bd	ad	ac

sider the squared functions, the table is very much simplified (inasmuch as in place of the coefficients ± 1, $\pm i$, it will contain only the coefficients ± 1): and we may complete the table by extending it to all the combinations 0, A, B, $A+B$, K, $K+A$, $K+B$, $K+A+B$, L, $L+A$, $L+B$, $L+A+B$, $K+L$, $K+L+A$, $K+L+B$, $K+L+A+B$ of the quarter periods: we have thus a table included in the annexed Table III, viz. attending herein only to the capital letters P, Q, R, S, the sixteen columns of the table show how the ratios of the terms $-S_2^2$, $-S_1^2$, etc. of the first column are altered when the arguments are increased by the foregoing combinations of quarter-periods, as indicated by the headings 0, A, B, etc. of the several columns.

But I have also in the table inserted the values to which $-S_2^2$, $-S_1^2$, etc. are respectively proportional, viz. the table runs $-S_2^2 = a$, $-S_1^2 = b$, etc. (read $-S_2^2 = |a|$, $-S_1^2 = |b|$, etc., the brackets $| \, |$ having been for greater brevity omitted throughout the table), and where it is of course to be understood that $-S_2^2$, $-S_1^2$, etc. are proportional only, not absolutely equal to $|a|$, $|b|$, etc. And I have also at the foot of the several columns inserted suffixes $\infty\infty$; *ab*, *cd*, etc. which refer to the columns of table II.

the squared double ϑ-functions.

L	$L+A$	$L+B$	$L+A+B$	$K+L$	$K+L+A$	$K+L+B$	$K+L+A+B$
$-Q_2^2=f$	$-Q_3^2=-cd$	$-Q^2= e$	$-Q_1^2=-ab$	$P_2^2=bc$	$P_3^2= bd$	$P^2= ad$	$P_1^2= ac$
$Q_1^2=ab$	$Q^2=-e$	$Q_3^2= cd$	$Q_2^2=-f$	$P_1^2=ac$	$P^2= ad$	$P_3^2= bd$	$P_2^2= bc$
$P_1^2=ac$	$P^2= ad$	$P_3^2= bd$	$P_2^2= bc$	$Q_1^2=ab$	$Q^2=-e$	$Q_3^2= cd$	$Q_2^2=-f$
$P^2=ad$	$P_1^2= ac$	$P_2^2= bc$	$P_3^2= bd$	$-Q^2=e$	$-Q_1^2=-ab$	$-Q_2^2= f$	$-Q_3^2=-cd$
$S^2=ae$	$S_1^2=-b$	$S_2^2=-a$	$S_3^2= be$	$-R^2=d$	$-R_1^2= c$	$-R_2^2=-de$	$-R_3^2=-ce$
$-S_2^2=a$	$-S_3^2=-be$	$-S^2=-ae$	$-$[illegible]$_1^2= b$	$R_2^2=de$	$R_3^2= ce$	$R^2=-d$	$R_1^2=-c$
$-S_1^2=b$	$-S^2=-ae$	$-S_3^2=-be$	$-S_2^2= a$	$-R_1^2=c$	$-R^2= d$	$-R_3^2=-ce$	$-R_2^2=-de$
$-R_1^2=c$	$-R^2= d$	$-R_3^2=-ce$	$-R_2^2=-de$	$-S_1^2=b$	$-S^2=-ae$	$-S_3^2=-be$	$-S_2^2= a$
$-R^2=d$	$-R_1^2= c$	$-R_2^2=-de$	$-R_3^2=-ce$	$S^2=ae$	$S_1^2= b$	$S_2^2=-a$	$S_3^2= be$
$-Q^2=e$	$-Q_1^2=-ab$	$-Q_2^2= f$	$-Q_3^2=-cd$	$P^2=ad$	$P_1^2= ac$	$P_2^2= bc$	$P_3^2= bd$
$R_2^2=de$	$R_3^2= ce$	$R^2=-d$	$R_1^2=-c$	$-S_2^2=a$	$-S_3^2=-be$	$-S^2=-ae$	$-S_1^2= b$
$R_3^2=ce$	$R_2^2= de$	$R_1^2=-c$	$R^2=-d$	$S_3^2=be$	$S_2^2=-a$	$S_1^2=-b$	$S^2= ae$
$Q_3^2=cd$	$Q_2^2=-f$	$Q_1^2= ab$	$Q^2=-e$	$P_3^2=bd$	$P_2^2= bc$	$P_1^2= ac$	$P^2= ad$
$S_3^2=be$	$S_2^2=-a$	$S_1^2=-b$	$S^2= ae$	$R_3^2=ce$	$R_2^2= de$	$R_1^2=-c$	$R^2=-d$
$P_3^2=bd$	$P_2^2= bc$	$P_1^2= ac$	$P^2= ad$	$Q_3^2=cd$	$Q_2^2=-f$	$Q_1^2= ab$	$Q^2=-e$
$P_2^2=bc$	$P_3^2= bd$	$P^2= ad$	$P_1^2= ac$	$-Q_2^2=f$	$-Q_3^2=-cd$	$-Q^2= e$	$-Q_1^2=-ab$
af	*be*	*ae*	*bf*	*de*	*ce*	*df*	*cf*

Comparing the first with any other column of the table for instance with the second column, the two columns respectively signify that

$$\begin{array}{rl|rl} -S_2^2(u) = & \{a\}, & -S_2^2(u+A) = & -\{be\}, \\ -S_1^2(u) = & \{b\}, & -S_1^2(u+A) = & -\{ae\}, \\ \vdots & & \vdots & \\ Q_1^2(u) = & \{ab\}, & Q_1^2(u+A) = & -\{e\}, \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

where as before $=$ means only that the terms are proportional; u is written for shortness instead of (u, u'), and so $u+A$ for $(u+A,\ u'+A')$, etc.: the variables in the functions $\{a\}$, $\{be\}$, etc. are in each case x, x'. But if in the second column we write $u-A$ for A, then the variables x, x' will be changed into new variables y, y', or the meaning will be

$$\begin{array}{rl|rl} & x,\ x' & & y,\ y' \\ -S_2^2(u) = & \{a\}, & -S_2^2(u) = & -\{be\}, \\ -S_1^2(u) = & \{b\}, & -S_1^2(u) = & -\{ae\}, \\ \vdots & & \vdots & \\ Q_1^2(u) = & \{ab\}, & Q_1^2(u) = & -\{e\}, \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

so that omitting from the table the terms which contain the capital letters P, Q, R, S, except only the outside lefthand column $-S_2^2$, $-S_1^2$, etc., the table indicates that these functions $-S_2^2$, $-S_1^2$, etc. are proportional to the functions $\{a\}$, $\{b\}$, etc. of x, x' given in the first column; also to the functions $-\{be\}$, $-\{ae\}$, etc. of y, y' given in the second column; also to the functions $-\{ae\}$, $-\{be\}$, etc. of z, z' given in the third column; and so on, with a different pair of variables in each of the 16 columns.

Thus comparing any two columns, for instance the first and second, it appears that we can have simultaneously

$$\begin{array}{rcl} x,\ x' & & y,\ y' \\ \{a\} & = & -\{be\}, \\ \{b\} & = & -\{ae\}, \\ \vdots & & \\ \{ab\} & = & -\{e\}, \\ \vdots & & \end{array}$$

(fifteen equations, since the meaning is that the terms are only proportional, not absolutely equal), equivalent to two equations serving to determine x, x'

in terms of y, y' or conversely y, y' in terms of x, x'. The functions in each column form in fact 16 sixes, such that any four belonging to the same six are linearly connected; and in any such linear relation between four functions in the lefthand column, substituting for these their values as functions in the righthand column we have the corresponding relations between four functions out of a set of six belonging to the righthand column, or we have an identity $0=0$. I will presently verify this in a particular case.

If in any column we give to the variables the values ∞, ∞ we obtain for the terms in the column the values which the terms of the first column assume on giving to x, x' the values shown at the foot of the column in question; thus in the second column giving to the variables the values ∞, ∞ the column becomes

$-\sqrt{be}, -\sqrt{ae}, 0, 0, -\sqrt{ab}, -\sqrt{cd}, 0, \sqrt{ad}, \sqrt{ac}, 0, \sqrt{bd}, \sqrt{bc}, 0, 0, \sqrt{de}, \sqrt{ce}$

which is in fact the *cd*-column of table II: this is of course as it should be, for the values in question are those of the functions $-S_2^2$, $-S_1^2$ etc. on writing therein $x, x'=c, d$.

The formulae show that

$$\sqrt{ab},\quad \sqrt{ac},\quad \sqrt{ad},\quad \sqrt{ae},\quad \sqrt{bc},\quad \sqrt{bd},\quad \sqrt{be},\quad \sqrt{cd},\quad \sqrt{ce},\quad \sqrt{de}$$

are in fact proportional to

$$k_1^2,\quad \varpi_1^2,\quad \varpi^2,\quad \sigma^2,\quad \varpi_2^2,\quad \varpi_3^2,\quad \sigma_3^2,\quad k_3^2,\quad \varrho_3^2,\quad \varrho_2^2$$

(k_1, k_2 etc. are *Göpel*'s k', k'', ...) and this gives rise to a remarkable theorem, for the ten squares are in fact functions of only four quantities $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (*Göpel*'s t, u, v, w). For greater clearness I introduce single letters $A, B, \ldots J$ and write

$$\begin{aligned}
A &= abc.def = (\sqrt{de})^2 = \varrho_2^4, &&= (\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)^2,\\
B &= abd.cef = (\sqrt{ce})^2 = \varrho_3^4, &&= 4(\alpha\gamma+\beta\delta)^2,\\
C &= abe.cdf = (\sqrt{cd})^2 = k_3^4, &&= 4(\alpha\delta+\beta\gamma)^2,\\
D &= abf.cde = (\sqrt{ab})^2 = k_1^4, &&= (\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)^2,\\
E &= acd.bef = (\sqrt{be})^2 = \sigma_3^4, &&= 4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2,\\
F &= ace.bdf = (\sqrt{bd})^2 = \varpi_3^4, &&= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2,\\
G &= acf.bde = (\sqrt{ac})^2 = \varpi_1^4, &&= 4(\alpha\delta-\beta\gamma)^2,\\
H &= ade.bcf = (\sqrt{bc})^2 = \varpi_2^4, &&= 4(\alpha\gamma-\beta\delta)^2,\\
I &= adf.bce = (\sqrt{ad})^2 = \varpi^4, &&= 4(\alpha\beta-\gamma\delta)^2,\\
J &= aef.bdc = (\sqrt{ae})^2 = \sigma^4, &&= (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2,
\end{aligned}$$

viz. it has to be shown that $A, B, \ldots J$ considered as given functions of the six letters a, b, c, d, e, f are really functions of four quantities $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; or what is the same thing, that $A, B, \ldots J$ considered as functions of a, b, c, d, e, f satisfy all those relations which they satisfy when considered as given functions of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Now considering them as given functions of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, they ought to satisfy six relations; and inasmuch as, so considered, they are in fact linear functions of $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4$, $\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2$, $\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2$, $\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2$, $\alpha\beta\gamma\delta$, five of these relations will be linear: there is a sixth non-linear relation, expressible in a variety of different forms, one of them, as is easily verified, being $\sqrt{AJ}\pm\sqrt{CG}\pm\sqrt{DF}=0$.

Now considering $A, B \ldots J$ as given functions of a, b, c, d, e, f there exist between them linear relations which may be obtained by the consideration of identities of the form

$$\begin{vmatrix} abcd \\ abcdef \end{vmatrix} = 0,$$

where the lefthand side is used for shortness to denote the determinant

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 & & \\ a, & b, & c, & d & & \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2 & & \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \\ a^2, & b^2, & c^2, & d^2, & e^2, & f^2 \end{vmatrix} = 0.$$

We thus obtain between them a system of fifteen linear relations which present themselves in the form

$$\begin{array}{rrcl}
(1.) & A-J+E-B & = & 0, \\
(2.) & -A-I+F-C & = & 0, \\
(3.) & A-H+G-D & = & 0, \\
(4.) & -B-G+H+C & = & 0, \\
(5.) & B-F+I+D & = & 0, \\
(6.) & C-E+J-D & = & 0, \\
(7.) & -E-D-H+E & = & 0, \\
(8.) & E-C-I+G & = & 0, \\
(9.) & F-B-J-G & = & 0, \\
(10.) & H-A+J-I & = & 0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&(11.) \quad -J+D-G+I = 0,\\
&(12.) \quad J+C-F+H = 0,\\
&(13.) \quad I+B-E-H = 0,\\
&(14.) \quad G+A+E-F = 0,\\
&(15.) \quad D-A+B-C = 0,
\end{aligned}$$

which are all included in the equations (10.), (4.), (12.), (15.), (6.) which serve to express G, B, E, F, I in terms of D, H, C, A, J [i. e. ac, ce, eb, bd, da in terms of ab, bc, cd, de, ea, if for the moment we write $G = ac$, etc.]. But the five linear relations in question are it is at once seen satisfied by $A, B, \ldots J$ considered as given functions of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

The equation $\sqrt{AJ} \pm \sqrt{DF} \pm \sqrt{CG} = 0$, substituting for $A, B, \ldots J$ their values in terms of a, b, c, d, e, f becomes

$$\sqrt{abc.def.aef.bcd} \pm \sqrt{abf.cde.ace.bdf} \pm \sqrt{abe.cdf.acf.bde} = 0,$$

which (omitting common factors) becomes $\sqrt{bc^2.ef^2} \pm \sqrt{bf^2.ce^2} \pm \sqrt{be^2.cf^2} = 0$, or taking the proper signs, this is the identity $bc.ef + be.fc + bf.ce = 0$.

It is to be noticed that

$$\begin{array}{ccc}
\delta^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2, & 2(\alpha\beta-\gamma\delta), & 2(\gamma\alpha+\beta\delta),\\
2(\alpha\beta+\gamma\delta), & \delta^2+\beta^2-\gamma^2-\alpha^2, & 2(\beta\gamma-\alpha\delta),\\
2(\gamma\alpha-\beta\delta), & 2(\beta\gamma+\alpha\delta), & \delta^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta^2,
\end{array}$$

each divided by $\delta^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ form a system of coefficients in the transformation between two sets of rectangular coordinates: we have therefore

$$\begin{array}{ccc}
\sqrt{ab}, & \sqrt{ad}, & \sqrt{ce},\\
\sqrt{be}, & \sqrt{de}, & \sqrt{ac},\\
\sqrt{bc}, & \sqrt{cd}, & \sqrt{ae},
\end{array}$$

each divided by $\sqrt{bd}$, *and the several terms being taken with proper signs,* as a system of coefficients in the transformation between two sets of rectangular axes, a result which seems to be the same as that obtained by *Hesse* in the Memoir „Transformations-Formeln für rechtwinklige Raum-Coordinaten"; this Journ. t. 63 (1864) pp. 247–251.

The composition of the last mentioned system of functions is better seen by writing them under the fuller form $\sqrt{abf.cde}$, etc., viz. omitting the radical signs the terms are

$$\begin{array}{ccc}
abf.cde, & adf.bce, & abd.cef\\
bef.acd, & def.abc, & acf.bde\\
bcf.ade, & cdf.abe, & aef.bcd
\end{array}$$

each divided by $bdf.ace$; or in an easily understood algorithm the terms are

	$bf.d$	$df.b$	$bd.f$
$a.ce$	$bf.d$	$df.b$	$bd.f$
$e.ac$	$bf.d$	$df.b$	$bd.f$
$c.ae$	$bf.d$	$df.b$	$bd.f$

each divided by $bdf.ace$.

Reverting to the before mentioned comparison of the first and second columns of Table III, four of the equations are

$$\begin{array}{lllll} x, x' & y, y' & & x, x' & y, y' \\ \{c\} = & \{d\}, & \text{that is} & \sqrt{c}[c] = & \sqrt{d}[d], \\ \{d\} = & \{c\}, & \text{that is} & \sqrt{d}[d] = & \sqrt{c}[c], \\ \{e\} = - & \{ab\}, & \text{that is} & \sqrt{e}[e] = - & \sqrt{ab}[ab], \\ \{f\} = - & \{cd\}, & \text{that is} & \sqrt{f}[f] = - & \sqrt{cd}[cd], \end{array}$$

viz. the four terms on the lefthand side are not absolutely equal, but only proportional to those on the righthand side. Substituting for $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, etc. their values, and introducing on the righthand side the factor

$$\sqrt{ac.bc.ce.cf.ad.bd.de.df}$$

the equations become

$$\begin{array}{lll} xx' & & yy' \\ [c] & = & ac.bc.ce.ef[d], \\ [d] & = & ad.bd.de.df[c], \\ [e] & = - & ce.de[ab], \\ [f] & = - & cf.df[cd]. \end{array}$$

The functions on the lefthand satisfy the identity

$$def[c]-efc[d]+fcd[e]-cde[f] = 0,$$

or as this may also be written

$$def[c]-cef[d]+cdf[e]-cde[f] = 0.$$

Hence substituting the righthand values the whole equation divides by $ce.de.cf.df$, and omitting this factor it becomes

$$ef.ac.bc[d]-ef.ad.bd[c]-cd\{[ab]-[cd]\} = 0,$$

where the variables are y, y': it is to be shown that this is in fact an identity, and (as it is thus immaterial what the variables are) I change them into x, x'.

We have

$$\begin{aligned} ac.bc[d]-ad.bd[c] &= (a-c)(b-c)(d-x)(d-x') \\ &\quad -(a-d)(b-d)(c-x)(c-x') \\ &= (c-d)\begin{vmatrix} 1, & x+x', & xx' \\ 1, & a+b, & ab \\ 1, & c+d, & cd \end{vmatrix}, \\ &= cd[xx'abcd] \end{aligned}$$

suppose.

We have moreover

$$\begin{aligned} [ab]-[cd] &= \frac{1}{(x-x')^2}\left\{\begin{matrix} abf.c'd'e'+a'b'f'.cde \\ -cdf.a\,b\,e-c'd'f'.abe \end{matrix}\right\}. \\ &= \frac{1}{(x-x')^2}(abc'd'-a'b'cd)(e'f-ef'), \end{aligned}$$

where for the moment a, b, a', etc. are written to denote $a-x$, $b-x$, $a-x'$, etc.; we have then

$$\begin{aligned} e'f-ef' &= (e-x')(f-x) = -(e-f)(x-x') = -ef(x-x') \\ &\quad -(e-x)(f-x') \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} abc'd'-a'b'cd &= (a-x)(b-x)(c-x')(d-x') = -(x-x')\begin{vmatrix} 1, & x+x', & xx' \\ 1, & a+b, & ab \\ 1, & c+d, & cd \end{vmatrix} \\ &\quad -(a-x')(b-x')(c-x)(d-x') \\ &= -(x-x')[xx'abcd]. \end{aligned}$$

Hence $[ab]-[cd] = ef\,[xx'abcd]$, and the equation to be verified becomes $(ef.cd-cd.ef)[xx'abcd] = 0$, viz. this is in fact an identity.

Cambridge, 14th March 1877.

Ueber die Darstellung der *Kummer*schen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch die *Göpel*sche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variabeln.

(Von *C. W. Borchardt.*)

In der merkwürdigen Abhandlung: ***Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*** (Bd. 35, p. 277 dieses Journals) hat *Göpel* bekanntlich den Zusammenhang zwischen den Thetafunctionen mit zwei Variabeln und den hyperelliptischen Integralen, welche eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function fünften Grades enthalten, festgestellt, indem er hierbei die Transformation zweiter Ordnung der Thetafunctionen als Hülfsmittel* benutzte.

Ich werde in den folgenden Betrachtungen, die sich speciell auf die von *Göpel* aufgestellte biquadratische Relation zwischen gewissen Systemen von vier Thetafunctionen beziehen, die *Göpel*sche Bezeichnung zwar erwähnen, dieselbe indessen durch die *Weierstrass*sche Bezeichnung ersetzen.

1. *Göpel* beginnt damit, sechzehn transcendente Functionen auf folgende Weise zu definiren. Es sei

$$f(\alpha,\beta) = r(u+2\alpha K+2\beta L)^2+r'(u'+2\alpha K'+2\beta L')^2-ru^2-r'u'^2,$$

und es mögen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ reihende Elemente bezeichnen, welchen alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beizulegen sind. Man setze nach einander

$$\begin{array}{lll} (P.) & \alpha=\mathfrak{a}, & \beta=\mathfrak{b}, \\ (Q.) & \alpha=\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}, & \beta=\mathfrak{b}, \\ (R.) & \alpha=\mathfrak{a}, & \beta=\mathfrak{b}+\tfrac{1}{2}, \\ (S.) & \alpha=\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}, & \beta=\mathfrak{b}+\tfrac{1}{2}\cdot \end{array}$$

Der auf diese Weise vierdeutigen Exponentialgrösse $e^{f(\alpha,\beta)}$ gebe man die vier Vorzeichen

$$\begin{aligned} \varepsilon''' &= 1, \\ \varepsilon'' &= (-1)^{\mathfrak{a}}, \\ \varepsilon' &= (-1)^{\mathfrak{b}}, \\ \varepsilon &= (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}, \end{aligned}$$

so werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
P''' &= \Sigma e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}, & R''' &= \Sigma e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
P'' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}} e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}, & R'' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}} e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
P' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}, & iR' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
P &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}, & iR &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
Q''' &= \Sigma e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b})}, & S''' &= \Sigma e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
iQ'' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}} e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b})}, & iS'' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}} e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
Q' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b})}, & iS' &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},\\
iQ &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b})}, & S &= \Sigma(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} e^{f(\mathfrak{a}+\frac{1}{2},\mathfrak{b}+\frac{1}{2})},
\end{aligned}$$

in welchen $i = \sqrt{-1}$, und die Summen Σ auf alle ganzzahligen Werthe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ auszudehnen sind, die sechzehn *Göpel*schen Functionen definirt.

Setzt man

$$\begin{aligned}
4(rK^2+r'K'^2) &= \pi i \tau_{11}, & 2(rKu+r'K'u') &= \pi i v_1,\\
4(rKL+r'K'L') &= \pi i \tau_{12} = \pi i \tau_{21}, & 2(rLu+r'L'u') &= \pi i v_2,\\
4(rL^2+r'L'^2) &= \pi i \tau_{22},
\end{aligned}$$

so stimmen die oben definirten sechzehn *Göpel*schen Functionen mit den *Weierstrass*schen ϑ-Functionen in der Weise überein, dass

$$\begin{aligned}
P'''(u,u') &= \vartheta_5(v_1,v_2), & R'''(u,u') &= \vartheta_4(v_1,v_2),\\
P''(u,u') &= \vartheta_{12}(v_1,v_2), & R''(u,u') &= \vartheta_{03}(v_1,v_2),\\
P'(u,u') &= \vartheta_{34}(v_1,v_2), & R'(u,u') &= \vartheta_3(v_1,v_2),\\
P(u,u') &= \vartheta_0(v_1,v_2), & R(u,u') &= \vartheta_{04}(v_1,v_2),\\
Q'''(u,u') &= \vartheta_{01}(v_1,v_2), & S'''(u,u') &= \vartheta_{23}(v_1,v_2),\\
Q''(u,u') &= \vartheta_{02}(v_1,v_2), & S''(u,u') &= \vartheta_{13}(v_1,v_2),\\
Q'(u,u') &= \vartheta_2(v_1,v_2), & S'(u,u') &= \vartheta_{24}(v_1,v_2),\\
Q(u,u') &= \vartheta_1(v_1,v_2), & S(u,u') &= -\vartheta_{14}(v_1,v_2).
\end{aligned}$$

Ordnet man nun die sechzehn ϑ-Functionen in folgendes Quadrat

$$\begin{matrix}
P''' & P'' & P' & P\\
R''' & R'' & R' & R\\
Q''' & Q'' & Q' & Q\\
S''' & S'' & S' & S
\end{matrix}$$

oder was dasselbe ist

$$\begin{matrix} \vartheta_5 & \vartheta_{12} & \vartheta_{34} & \vartheta_0 \\ \vartheta_4 & \vartheta_{03} & \vartheta_3 & \vartheta_{04} \\ \vartheta_{01} & \vartheta_{02} & \vartheta_2 & \vartheta_1 \\ \vartheta_{23} & \vartheta_{13} & \vartheta_{24} & -\vartheta_{14}, \end{matrix}$$

so sind in diesem Quadrat die zehn ϑ-Functionen, welche in der ersten Horizontalreihe, der ersten Verticalreihe und in der Diagonalreihe stehen, gerade Functionen von v_1, v_2 (oder, was dasselbe ist, von u, u'), die übrigen sechs ϑ-Functionen dagegen ungerade Functionen. Die Nullwerthe der ϑ-Functionen, d. h. die Werthe, welche sie erhalten, wenn beide Argumente verschwinden, werden nach der *Göpel*schen Bezeichnung durch das Schema

$$\begin{matrix} \varpi''' & \varpi'' & \varpi' & \varpi \\ \varrho''' & \varrho'' & 0 & 0 \\ k''' & 0 & k' & 0 \\ \sigma''' & 0 & 0 & \sigma, \end{matrix}$$

und nach der *Weierstrass*schen Bezeichnung durch das Schema

$$\begin{matrix} c_5 & c_{12} & c_{34} & c_0 \\ c_4 & c_{03} & 0 & 0 \\ c_{01} & 0 & c_2 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & -c_{14} \end{matrix}$$

dargestellt.

Nennt man Perioden Grössenpaare von der Art, dass, wenn man die Argumente v_1, v_2 um dieselben vermehrt, die funfzehn Brüche $\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$ abgesehen vom Zeichen unverändert bleiben, so ergeben sich bei Vermehrung der Argumente um halbe Perioden aus ϑ_5, dem Hauptheta nach der *Weierstrass*schen Bezeichnung, abgesehen von einem Exponentialfactor, die übrigen funfzehn ϑ-Functionen.

2. Unter den sechzehn ϑ-Functionen kann man auf sechzehn verschiedene Arten ein System von sechs Functionen so auswählen, dass je vier dieser sechs Functionen durch eine homogene lineare Relation zwischen ihren Quadraten verbunden sind. Als Repräsentant dieser Systeme von sechs Functionen kann man dasjenige der sechs ungeraden ϑ-Functionen ansehen, die übrigen funfzehn Systeme leiten sich aus diesem durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden her.

Mit Hülfe dieser Systeme von sechs ϑ-Functionen hat Herr ***Rosenhain*** den Uebergang zu den Integralen, welcher in der *Göpel*schen Abhandlung nur durch eine höchst scharfsinnige Substitution möglich wird, mit grosser Leichtigkeit vollzogen. Auch die *Weierstrass*sche Methode, die ϑ-Functionen durch einfache und componirte Indices zu bezeichnen, welche von Herrn *Königsberger* (Bd. 64, p. 19 dieses Journals) reproducirt worden ist, beruht auf der Existenz dieser Systeme.

3. Neben den von Herrn *Rosenhain* entdeckten Systemen von sechs ϑ-Functionen, von denen je vier durch eine lineare Relation zwischen ihren Quadraten verbunden sind, giebt es andere nicht minder wichtige Systeme von vier ϑ-Functionen, welche durch eine homogene biquadratische Relation mit einander verbunden sind, deren Kenntniss wir *Göpel* (p. 292, Formel (30.) der citirten Abhandlung) verdanken, und deren Bedeutung für die Theorie der Transformation bereits Herr *Hermite* (Comptes rendus de l'Académie des sciences 1855, 1er semestre) nachgewiesen hat.

Solcher *Göpel*scher biquadratischer Relationen zwischen vier ϑ-Functionen giebt es im Ganzen sechzig. Je vier dieser Relationen gehören so zu einander, dass sie durch Vermehrung der Argumente um halbe Perioden aus einander hervorgehen, und dass in den vier Relationen zusammengenommen alle sechzehn ϑ-Functionen vorkommen. Eine dieser vier Relationen enthält nur gerade ϑ-Functionen, jede der drei anderen zwei gerade und zwei ungerade ϑ-Functionen. Wählt man die nur gerade ϑ's enthaltenden Relationen als Repräsentanten der übrigen, so giebt es funfzehn solcher Repräsentanten.

Kennt man von diesen Relationen *eine*, so kann man durch die von Herrn *Henoch* in seiner (leider nur als Dissertation gedruckten) Abhandlung: ***De Abelianarum Functionum Periodis*** angegebenen Transformationen der Fundamentalperioden aus dieser einen die übrigen vierzehn herleiten und zwar mit Hülfe der in der *Henoch*schen Abhandlung p. 19 abgedruckten Tabelle.

4. Die von *Göpel* an der oben bezeichneten Stelle gegebene Relation (30.) besteht zwischen den Functionen $P''P'S''S'$ und lautet:

$$\left.\begin{array}{c} P''^4+P'^4+S''^4+S'^4-2\,\dfrac{\varpi'''\varpi\sigma'''\sigma(\varpi''^4-\varpi'^4)^2}{(\varpi''\varpi'\varrho'''\varrho''k'''k')^2}P''P'S''S' \\ -\dfrac{\varpi''^4+\varpi'^4}{\varpi''^2\varpi'^2}(P''^2P'^2+S''^2S'^2)-\dfrac{\varrho'''^4+k'''^4}{\varrho'''^2k'''^2}(P''^2S''^2+P'^2S'^2) \\ +\dfrac{\varrho''^4+k'^4}{\varrho''^2k'^2}(P''^2S'^2+P'^2S''^2) \end{array}\right\} = 0,$$

oder in der ***Weierstrass***schen Bezeichnung

$$\left.\begin{array}{c}\vartheta_{12}^4+\vartheta_{34}^4+\vartheta_{13}^4+\vartheta_{24}^4+2\dfrac{c_5c_0c_{23}c_{14}(c_{12}^4-c_{34}^4)^2}{(c_{12}c_{34}c_4c_{01}c_{03}c_2)}\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_{13}\vartheta_{24}\\ -\dfrac{c_{12}^4+c_{34}^4}{c_{12}^2c_{34}^2}(\vartheta_{12}^2\vartheta_{34}^2+\vartheta_{13}^2\vartheta_{24}^2)-\dfrac{c_4^4+c_{01}^4}{c_4^2c_{01}^2}(\vartheta_{12}^2\vartheta_{13}^2+\vartheta_{34}^2\vartheta_{24}^2)\\ +\dfrac{c_{03}^4+c_2^4}{c_{03}^2c_2^2}(\vartheta_{12}^2\vartheta_{24}^2+\vartheta_{34}^2\vartheta_{13}^2)\end{array}\right\}=0.$$

Von den vier ϑ-Functionen sind ϑ_{12}, ϑ_{34} gerade, ϑ_{13}, ϑ_{24} ungerade. Durch Vermehrung der Argumente um eine halbe Periode gehen ϑ_{12}, ϑ_{34}, ϑ_{13}, ϑ_{24} in ϑ_5, ϑ_0, $-\vartheta_{23}$, ϑ_{14} über. Die *Göpel*sche Relation geht daher über in

$$\left.\begin{array}{c}\vartheta_5^4+\vartheta_0^4+\vartheta_{23}^4+\vartheta_{14}^4-2\dfrac{c_5c_0c_{23}c_{14}(c_{12}^4-c_{34}^4)^2}{(c_{12}c_{34}c_4c_{01}c_{03}c_2)^2}\vartheta_5\vartheta_0\vartheta_{23}\vartheta_{14}\\ -\dfrac{c_{12}^4+c_{34}^4}{c_{12}^2c_{34}^2}(\vartheta_5^2\vartheta_0^2+\vartheta_{23}^2\vartheta_{14}^2)-\dfrac{c_4^4+c_{01}^4}{c_4^2c_{01}^2}(\vartheta_5^2\vartheta_{23}^2+\vartheta_0^2\vartheta_{14}^2)\\ +\dfrac{c_{03}^4+c_2^4}{c_{03}^2c_2^2}(\vartheta_5^2\vartheta_{14}^2+\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2)\end{array}\right\}=0.$$

Zwischen den zehn Grössen c bestehen die Relationen, welche *Göpel* in den Formeln (18.) bis (28.) und Herr ***Rosenhain*** in seiner Preisschrift mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes (mém. des savants étrangers 1851) in den Formeln (89.), (90.) zusammengestellt hat, und durch welche sechs dieser Grössen durch die vier übrigen ausdrückbar sind. Nach diesen Formeln, die ich hier nicht wiederhole, wird

$$\begin{array}{ll}c_{12}^4+c_{34}^4=c_5^4+c_0^4-c_{23}^4-c_{14}^4, & c_{12}^2c_{34}^2=c_5^2c_0^2-c_{23}^2c_{14}^2,\\ c_4^4+c_{01}^4=c_5^4+c_{23}^4-c_0^4-c_{14}^4, & c_4^2c_{01}^2=c_5^2c_{23}^2-c_0^2c_{14}^2,\\ c_{03}^4+c_2^4=c_5^4+c_{14}^4-c_0^4-c_{23}^4, & -c_{03}^2c_2^2=c_5^2c_{14}^2-c_0^2c_{23}^2,\end{array}$$

und hieraus

$$(c_{12}^4-c_{34}^4)^2=\Pi(c_5^2+\varepsilon c_0^2+\varepsilon' c_{23}^2+\varepsilon\varepsilon' c_{14}^2),\qquad (\varepsilon,\varepsilon'=\pm 1),$$

folglich ergiebt sich:

$$(1.)\quad\left.\begin{array}{c}\vartheta_5^4+\vartheta_0^4+\vartheta_{23}^4+\vartheta_{14}^4\\ +2\dfrac{c_5c_0c_{23}c_{14}\underset{\varepsilon,\varepsilon'}{\Pi}(c_5^2+\varepsilon c_0^2+\varepsilon' c_{23}^2+\varepsilon\varepsilon' c_{14}^2)}{(c_5^2c_0^2-c_{23}^2c_{14}^2)(c_5^2c_{23}^2-c_0^2c_{14}^2)(c_5^2c_{14}^2-c_0^2c_{23}^2)}\vartheta_5\vartheta_0\vartheta_{23}\vartheta_{14}\\ -\dfrac{c_5^4+c_0^4-c_{23}^4-c_{14}^4}{c_5^2c_0^2-c_{23}^2c_{14}^2}(\vartheta_5^2\vartheta_0^2+\vartheta_{23}^2\vartheta_{14}^2)-\dfrac{c_5^4+c_{23}^4-c_0^4-c_{14}^4}{c_5^2c_{23}^2-c_0^2c_{14}^2}(\vartheta_5^2\vartheta_{23}^2+\vartheta_0^2\vartheta_{14}^2)\\ -\dfrac{c_5^4+c_{14}^4-c_0^4-c_{23}^4}{c_5^2c_{14}^2-c_0^2c_{23}^2}(\vartheta_5^2\vartheta_{14}^2+\vartheta_0^2\vartheta_{23}^2)\end{array}\right\}=0.$$

Setzt man

$$\vartheta_5 = w, \quad \vartheta_0 = x, \quad \vartheta_{23} = y, \quad \vartheta_{14} = z,$$
$$c_5 = w_0, \quad c_0 = x_0, \quad c_{23} = y_0, \quad c_{14} = z_0,$$

so hat man daher die Gleichung

$$\text{(II.)} \left\{ \begin{aligned} & w^4 + x^4 + y^4 + z^4 + 2\frac{w_0 x_0 y_0 z_0 \prod\limits_{\varepsilon,\varepsilon'} (w_0^2 + \varepsilon x_0^2 + \varepsilon' y_0^2 + \varepsilon\varepsilon' z_0^2)}{(w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2)(w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2)(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)} wxyz \\ & - \frac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2}(w^2 x^2 + y^2 z^2) - \frac{w_0^4 + y_0^4 - x_0^4 - z_0^4}{w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2}(w^2 y^2 + x^2 z^2) \\ & \qquad - \frac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2}(w^2 z^2 + x^2 y^2) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Diese Gleichung hat die Eigenschaft unverändert zu bleiben

1) wenn man die Grössen w, x, y, z und w_0, x_0, y_0, z_0 gleichzeitig derselben Permutation unterwirft,

2) wenn man w_0, x_0, y_0, z_0 unverändert lässt, dagegen die Grössen w, x, y, z in zwei Paare theilt und die Grössen jedes Paares vertauscht,

3) wenn man von den vier Grössenpaaren w, w_0; x, x_0; y, y_0; z, z_0 eins negativ nimmt oder zwei mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt,

4) wenn man w_0, x_0, y_0, z_0 unverändert lässt und von den Grössen $w; x, y, z$ zwei negativ nimmt.

Man bezeichne mit Φ die linke Seite der Gleichung (II.), so wird Φ identisch $= 0$ für $w = w_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Bildet man ferner

$$4\Phi_1 = w\frac{\partial\Phi}{\partial w} + x\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

so ergiebt sich

$$\Phi_1 = w^4 + x^4 - y^4 - z^4 - \frac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2}(w^2 x^2 - y^2 z^2),$$

welches für $w = w_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ ebenfalls verschwindet, und da dasselbe für

$$4\Phi_2 = w\frac{\partial\Phi}{\partial w} - x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$
$$4\Phi_3 = w\frac{\partial\Phi}{\partial w} - x\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

der Fall ist, so verschwinden für

$$\text{(III.)} \quad w = w_0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

gleichzeitig $\frac{\partial \Phi}{\partial w}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, d. h. der Punkt (III.) ist ein Knotenpunkt der durch die Gleichung (II.) dargestellten Fläche. Und nach der unter 2) und 4) bemerkten Unveränderlichkeit der Function Φ gehen aus dem einen Punkt (III.) 15 andere Knotenpunkte hervor.

5. Wendet man auf die *Göpel*sche Relation (II.) die erwähnten von Herrn *Henoch* angegebenen sechs Transformationen der Fundamentalperioden an, so erhält man sämmtliche funfzehn biquadratische Relationen, welche zwischen vier geraden ϑ-Functionen möglich sind. Diese funfzehn Relationen unterscheiden sich von einander nur durch die Zeichen der einzelnen Glieder und zerfallen hiernach in vier Klassen. Die Unterschiede der Vorzeichen lassen sich dahin zusammenfassen, dass man in der *Göpel*schen Relation (II.) die vier Variabeln w, x, y, z nicht geradezu den vier ϑ-Functionen gleichsetzt, sondern diesen ϑ-Functionen multiplicirt mit einer bestimmten Potenz einer achten Wurzel der Einheit. Man setze

$$j = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

sodass $j^2 = i = \sqrt{-1}$, also j eine achte Wurzel der Einheit ist, dann zerfallen die fünfzehn Relationen in folgende vier Klassen

I.

1.) $\vartheta_5, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_{23},$

2.) $\vartheta_5, \quad \vartheta_{12}, \quad \vartheta_{34}, \quad \vartheta_0,$

3.) $\vartheta_5, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{12}, \quad \vartheta_{03},$

4.) $\vartheta_5, \quad \vartheta_{34}, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_2,$

5.) $\vartheta_5, \quad \vartheta_0, \quad \vartheta_{23}, \quad \vartheta_{14},$

II.

6.) $\vartheta_5, \quad \vartheta_{03}, \quad \vartheta_2, \quad i\vartheta_{14},$

III.

7.) $\vartheta_{12}, \quad \vartheta_{03}, \quad j\vartheta_{01}, \quad j\vartheta_{23},$

8.) $\vartheta_{34}, \quad \vartheta_0, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{03},$

9.) $\vartheta_{34}, \quad \vartheta_2, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{23},$

10.) $\vartheta_{12}, \quad \vartheta_0, \quad j\vartheta_{01}, \quad j\vartheta_2,$

11.) $\vartheta_0, \quad \vartheta_{14}, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{01},$

12.) $\vartheta_{12}, \quad \vartheta_{34}, \quad j\vartheta_{23}, \quad j\vartheta_{14},$

IV.

13.) $\vartheta_2, \quad i\vartheta_{14}, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{12},$

14.) $\vartheta_{03}, \quad i\vartheta_{14}, \quad j\vartheta_{01}, \quad j\vartheta_{34},$

15.) $\vartheta_0, \quad i\vartheta_{23}, \quad j\vartheta_{03}, \quad j\vartheta_2.$

Um die Bedeutung dieser Tabelle an einem Beispiel anschaulich zu machen erwähne ich, dass die Relation 13.) zwischen den ϑ-Functionen ϑ_2, ϑ_{14}, ϑ_4, ϑ_{12} sich aus der Gleichung (II.) ergiebt, wenn man

$$w = \vartheta_2, \quad x = i\vartheta_{14}, \quad y = j\vartheta_4, \quad z = j\vartheta_{12},$$
$$w_0 = c_2, \quad x_0 = i\,c_{14}, \quad y_0 = j\,c_4, \quad z_0 = j\,c_{12}$$

setzt.

Die *Göpel*sche Relation ist identisch mit derjenigen, welche Herr *Cayley* in der ersten seiner beiden Abhandlungen p. 215 dieses Bandes aus geometrischen Betrachtungen erhalten hat, als er die Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten bestimmte, deren Singularitäten den Relationen zwischen den Quadraten der sechzehn ϑ-Functionen entsprechen. Aber seine Untersuchung hat ihm nicht gezeigt, dass die Variabeln seiner Gleichung ϑ-Functionen und die Constanten die Nullwerthe dieser ϑ-Functionen sind, sie hat ihn ferner darüber in Zweifel gelassen, ob die erhaltene Gleichung eine Fläche vierter Ordnung von derselben Allgemeinheit darstellt, wie die von Herrn *Kummer* untersuchte und in mehreren Gleichungsformen definirte Fläche.

Um diesen Zweifel zu heben, werde ich im Folgenden die lineare Transformation angeben, durch welche die eine der *Kummer*schen Gleichungsformen in die *Göpel*sche übergeht.

6. In dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom Jahre 1864 p. 253 hat Herr *Kummer* die Gleichung der Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten auf folgende Form gebracht:

Es seien s, p, q, r vier in den Coordinaten der Fläche lineare und von einander unabhängige Ausdrücke, a, b, c drei Constanten, man setze

$$\varphi = s^2+p^2+q^2+r^2+2a(sp+qr)+2b(sq+pr)+2c(sr+pq)$$

und bestimme aus a, b, c eine neue Constante

$$K = a^2+b^2+c^2-2abc-1,$$

endlich setze man

$$\psi = \varphi^2-16Kspqr,$$

so ist $\psi=0$ die Gleichung der Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten bezogen auf ein gewisses System von vieren ihrer singulären Tangentialebenen.

Ich setze hierin zunächst

$$\begin{aligned} s &= s_1+p_1+q_1+r_1,\\ p &= s_1+p_1-q_1-r_1,\\ q &= s_1-p_1+q_1-r_1,\\ r &= s_1-p_1-q_1+r_1, \end{aligned}$$

so wird

$$\tfrac{1}{4}\varphi = Ms_1^2+a_1p_1^2+b_1q_1^2+c_1r_1^2,$$

wo

$$\begin{aligned} M &= 1+a+b+c, \\ a_1 &= 1+a-b-c, \\ b_1 &= 1-a+b-c, \\ c_1 &= 1-a-b+c, \end{aligned}$$

$$spqr = s_1^4+p_1^4+q_1^4+r_1^4-2\{s_1^2p_1^2+s_1^2q_1^2+s_1^2r_1^2+p_1^2q_1^2+p_1^2r_1^2+q_1^2r_1^2\}+8s_1p_1q_1r_1.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{16}\psi = {} & (M^2-K)s_1^4+(a_1^2-K)p_1^4+(b_1^2-K)q_1^4+(c_1^2-K)r_1^4 \\ & +2(Ma_1+K)s_1^2p_1^2+2(Mb_1+K)s_1^2q_1^2+2(Mc_1+K)s_1^2r_1^2 \\ & +2(b_1c_1+K)q_1^2r_1^2+2(a_1c_1+K)p_1^2r_1^2+2(a_1b_1+K)p_1^2q_1^2-8Ks_1p_1q_1r_1 \end{aligned}$$

oder

$$\tfrac{1}{32}\psi = \begin{cases} (a+1)(b+1)(c+1)s_1^4+(a+1)(b-1)(c-1)p_1^4+(a-1)(b+1)(c-1)q_1^4+(a-1)(b-1)(c+1)r_1^4 \\ +2(a-bc)[(a+1)s_1^2p_1^2+(a-1)q_1^2r_1^2]+2(b-ac)[(b+1)s_1^2q_1^2+(b-1)p_1^2r_1^2] \\ +2(c-ab)[(c+1)s_1^2r_1^2+(c-1)p_1^2q_1^2]-4Ks_1p_1q_1r_1. \end{cases}$$

Man setze

$$a = \frac{y_0^2z_0^2+w_0^2x_0^2}{y_0^2z_0^2-w_0^2x_0^2}, \quad b = \frac{x_0^2z_0^2+w_0^2y_0^2}{x_0^2z_0^2-w_0^2y_0^2}, \quad c = \frac{x_0^2y_0^2+w_0^2z_0^2}{x_0^2y_0^2-w_0^2z_0^2},$$

$$s_1 = w_0w, \quad p_1 = x_0x, \quad q_1 = y_0y, \quad r_1 = z_0z.$$

Um K durch die neuen Grössen w_0, x_0, y_0, z_0 auszudrücken, führe man die Grössen

$$a' = \frac{y_0z_0+w_0x_0}{y_0z_0-w_0x_0}, \quad b' = \frac{x_0z_0+w_0y_0}{x_0z_0-w_0y_0}, \quad c' = \frac{x_0y_0+w_0z_0}{x_0y_0-w_0z_0}$$

ein, so dass

$$a = \tfrac{1}{2}\left(a'+\frac{1}{a'}\right), \quad b = \tfrac{1}{2}\left(b'+\frac{1}{b'}\right), \quad c = \tfrac{1}{2}\left(c'+\frac{1}{c'}\right).$$

Stellt man

$$K = a^2+b^2+c^2-2abc-1$$

zunächst durch a', b', c' dar, so erhält man der bekannten Identität

$$1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

analog

$$4K = \frac{(a'b'c'-1)(a'-b'c')(b'-a'c')(c'-a'b')}{a'^2b'^2c'^2}$$

oder, wenn man die Werthe von a', b', c' einsetzt und der Kürze wegen

$$\mathfrak{A} = y_0^2 z_0^2 - w_0^2 x_0^2, \quad \mathfrak{B} = x_0^2 z_0^2 - w_0^2 y_0^2, \quad \mathfrak{C} = x_0^2 y_0^2 - w_0^2 z_0^2$$

setzt,

$$4K = \frac{16(w_0 x_0 y_0 z_0)^4}{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})^2} \Pi(w_0^2 + \varepsilon x_0^2 + \varepsilon' y_0^2 + \varepsilon\varepsilon' z_0^2),$$

wo das Product Π sich auf die vier Werthe-Combinationen $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$ bezieht. Ferner wird

$$(a+1)(b+1)(c+1)s_1^4 + (a+1)(b-1)(c-1)p_1^4 + (a-1)(b+1)(c-1)q_1^4 + (a-1)(b-1)(c+1)r_1^4$$
$$= \frac{8(w_0 x_0 y_0 z_0)^4}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} (w^4 + x^4 + y^4 + z^4),$$

$$2(a-bc)[(a+1)s_1^2 p_1^2 + (a-1) q_1^2 r_1^2] = \frac{8(w_0 x_0 y_0 z_0)^4}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \cdot \frac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{\mathfrak{A}} (w^2 x^2 + y^2 z^2),$$

$$2(b-ac)[(b+1)s_1^2 q_1^2 + (b-1) p_1^2 r_1^2] = \frac{8(w_0 x_0 y_0 z_0)^4}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \cdot \frac{w_0^4 + y_0^4 - x_0^4 - z_0^4}{\mathfrak{B}} (w^2 y^2 + x^2 z^2),$$

$$2(c-ab)[(c+1)s_1^2 r_1^2 + (c-1) p_1^2 q_1^2] = \frac{8(w_0 x_0 y_0 z_0)^4}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \cdot \frac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{\mathfrak{C}} (w^2 z^2 + x^2 y^2).$$

Das schliessliche Resultat der linearen Substitution ist daher folgendes:

Man setze in die *Kummer*sche Gleichung

$$a = -\frac{w_0^2 x_0^2 + y_0^2 z_0^2}{w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2}, \quad b = -\frac{w_0^2 y_0^2 + x_0^2 z_0^2}{w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2}, \quad c = -\frac{w_0^2 z_0^2 + x_0^2 y_0^2}{w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2},$$

$$s = w_0 w + x_0 x + y_0 y + z_0 z,$$
$$p = w_0 w + x_0 x - y_0 y - z_0 z,$$
$$q = w_0 w - x_0 x + y_0 y - z_0 z,$$
$$r = w_0 w - x_0 x - y_0 y + z_0 z,$$

so wird

$$-\frac{(w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2)(w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2)(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)}{256(w_0 x_0 y_0 z_0)^4} \psi$$

$$= \begin{cases} w^4 + x^4 + y^4 + z^4 + \dfrac{2 w_0 x_0 y_0 z_0 \Pi(w_0^2 + \varepsilon x_0^2 + \varepsilon' y_0^2 + \varepsilon\varepsilon' z_0^2)}{(w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2)(w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2)(w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2)} w x y z \\ -\dfrac{w_0^4 + x_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{w_0^2 x_0^2 - y_0^2 z_0^2}(w^2 x^2 + y^2 z^2) - \dfrac{w_0^4 + y_0^4 - x_0^4 - z_0^4}{w_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2}(w^2 y^2 + x^2 z^2) \\ \qquad -\dfrac{w_0^4 + z_0^4 - x_0^4 - y_0^4}{w_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2}(w^2 z^2 + x^2 y^2), \end{cases}$$

wo das Product Π sich auf die vier Combinationen $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$ bezieht, eine Gleichung, deren rechte Seite genau mit der linken Seite Φ der Gleichung (II.) übereinstimmt.

Die Darstellung der *Kummer*schen Fläche durch die Gleichung (II.) hat den Vortheil, dass sich die drei Brüche $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$, die man als Coordinaten der Fläche ansehen kann, in der Form von Quotienten zweier ϑ-Functionen mit zwei Variabeln ergeben, welche die Gleichung der Fläche identisch erfüllen, dass man ferner nach den *Rosenhain*schen Formeln diese Quotienten der ϑ-Functionen durch algebraische Functionen zweier Parameter ξ, η ersetzen kann, welche nur Quadratwurzeln aus ganzen Functionen je eines dieser Parameter enthalten, und zwar aus ganzen Functionen, die den sechsten Grad nicht übersteigen.

Berlin, Mai 1877.

Ueber einen Satz aus der Theorie der Leibrenten.

(Von Herrn *C. J. Malmsten* in Mariestad, Schweden.)

---

§ 1.

Grundbegriffe und Bezeichnungen.

(1.) **E***in Jahr* ist die Einheit der Zeit, und
p die Zahl der Procente.

(2.) $\varrho = \frac{p}{100}$ und $r = 1 + \varrho$.

(3.) t die Zeit, immer ein Theil eines Jahres oder höchstens ein Jahr, und folglich t nicht grösser als Eins.

(4.) $\frac{M}{r^t}$ der gegenwärtige Werth (am *Anfang* der Zeit t) für M Mark, welche am *Ende* der Zeit t ausbezahlt werden sollen.

(5.) $f(m+t)$ die Anzahl derjenigen Personen, die nach Ablauf der Zeit t von den $f(m)$ jetzt lebenden noch am Leben sind. — Folglich

(6.) $\frac{f(m+t)}{f(m)}$ die Wahrscheinlichkeit für einen m-jährigen noch die Zeit t zu leben.

(7.) $P(t, m)$ der gegenwärtige Werth einer Leibrente, welche einem
m-jährigen
mit t Mark
am *Ende* jedes Zeit-Abschnittes t, den er vollendet haben wird, ausbezahlt werden soll*).

(8.) $P(m) = P(1, m)$ der gegenwärtige Werth einer Leibrente, welche
einem m-jährigen
mit 1 Mark
am *Ende* jedes ganzen Jahres, das er vollendet haben wird, ausbezahlt werden soll.

---

*) Da während des Verlaufes eines ganzen Jahres die Leibrente (von t Mark) $\frac{1}{t}$ mal ausbezahlt werden soll, so ist der ganze Leibrentenbetrag immer $= 1$ Mark.

(9.) $P_1(t, m)$ der gegenwärtige Werth einer Leibrente, welche einem
m-jährigen
mit t Mark
in der *Mitte* jedes Zeit-Abschnittes t, die er erlebt haben wird,
ausbezahlt werden soll.

§ 2.

Aus (4.) und (6.) folgt unmittelbar, dass

$$(10.) \quad \frac{t}{r^t} \cdot \frac{f(m+t)}{f(m)} \quad \text{und} \quad \frac{t}{r^{\frac{1}{2}t}} \cdot \frac{f(m+\frac{1}{2}t)}{f(m)}$$

die analytischen Ausdrücke für die gegenwärtigen Werthe der t Mark sind, welche
einem *m*-jährigen
nach Verlauf beziehungsweise der Zeit t und der Zeit $\frac{1}{2}t$, wenn (beziehungsweise) er dann noch am Leben ist,
ausbezahlt werden sollen.

Ebenso folgt aus (4.), (6.) und (7.), dass

$$(11.) \quad \frac{P(t, m+t)}{r^t} \cdot \frac{f(m+t)}{f(m)}$$

der analytische Ausdruck für den gegenwärtigen Werth einer solchen um t Jahr *„aufgeschobenen“* Leibrente ist, welche
einem *m*-jährigen
mit t Mark
am *Ende* jedes Zeit-Abschnittes t, den er,
von seinem $(m+t)^{\text{ten}}$ Jahre an gerechnet, erlebt haben wird,
ausbezahlt werden soll;
und aus (4.), (6.) und (9.) folgt, dass

$$(12.) \quad \frac{P_1(t, m+t)}{r^t} \cdot \frac{f(m+t)}{f(m)}$$

der analytische Ausdruck für den gegenwärtigen Werth einer solchen um t Jahr *„aufgeschobenen“* Leibrente ist, welche
einem *m*-jährigen
mit t Mark
in der *Mitte* jedes Zeitabschnittes t, die er,
von seinem $(m+t)^{\text{ten}}$ Jahre an gerechnet, erlebt haben wird,
ausbezahlt werden soll.

Die genaue Erwägung der Bedeutungen der Ausdrücke (7.), (10.) und (11.) lässt ohne Schwierigkeit die Gleichung

$$(13.)\qquad P(t,m) = \frac{t}{r^t}\cdot\frac{f(m+t)}{f(m)}+\frac{P(t,m+t)}{r^t}\cdot\frac{f(m+t)}{f(m)}$$

finden, und ebenso giebt die Definition (9.) von $P_1(t,m)$, mit Hülfe von (10.) und (12.)

$$(14.)\qquad P_1(t,m) = \frac{t}{r^{\frac{1}{2}t}}\cdot\frac{f(m+\frac{1}{2}t)}{f(m)}+\frac{P_1(t,m+t)}{r^t}\cdot\frac{f(m+t)}{f(m)}.$$

Zu Folge der Definitionen (7.) und (9.) ist

	I. Zeit-Abschnitt		II. Zeit-Abschnitt		III. Zeit-Abschnitt		IV. Zeit-Abschnitt		u. s. w.
	Mitte	Ende	Mitte	Ende	Mitte	Ende	Mitte	Ende	
$P(t,m)$ der gegenw. Werth von		t M		t M		t M		t M	u. s. w.
$P_1(t,m)$ der gegenw. Werth von	t M		t M		t M		t M		u. s. w.
$P(\frac{1}{2}t,m)$ der gegenw. Werth von	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	$\frac{1}{2}t$ M	u. s. w.

woraus unmittelbar einleuchtet, dass für ein und dasselbe m

$$(15.)\qquad 2P(\tfrac{1}{2}t,m) = P(t,m)+P_1(t,m).$$

§ 3.

Mit Hülfe der in (13.), (14.) und (15.) gewonnenen Resultate können wir nun durch folgende leichte Umformungen einen merkwürdig einfachen Ausdruck von $P(t,m)$ als Function von t ableiten. Setzen wir nämlich

$$(16.)\qquad \Delta\frac{f(m).P(t,m)}{r^m} = \frac{f(m).P(t,m)}{r^m}-\frac{f(m+t).P(t,m+t)}{r^{m+t}},$$

so giebt die Relation (13.)

$$(17.)\qquad \frac{t.f(m+t)}{r^{m+t}} = \Delta\frac{f(m).P(t,m)}{r^m}$$

und, $m-t$ für m gesetzt,

$$(18.)\qquad \frac{t.f(m)}{r^m} = \Delta\frac{f(m-t).P(t,m-t)}{r^{m-t}},$$

woraus

$$\frac{f(m-t).P(t,m-t)}{r^{m-t}} = \frac{f(m)}{r^m}\{t+P(t,m)\}$$

folgt, und durch Substitution dieses Werthes in (18.)

$$(19.)\qquad \frac{t.f(m)}{r^m} = \varDelta\frac{f(m)}{r^m}\{t+P(t,m)\}.$$

Ebenso giebt die Formel (14.), wenn man

$$\varDelta\frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} = \frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} - \frac{f(m+t).P_1(t,m+t)}{r^{m+t}},$$

setzt,

$$(20.)\qquad \varDelta\frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} = \frac{t.f(m+\frac{1}{2}t)}{r^{m+\frac{1}{2}t}}.$$

Nun ist zu bemerken, dass man, weil t nicht grösser als 1 ist, immer

$$(21.)\qquad f(m+\tfrac{1}{2}t) = \frac{f(m)+f(m+t)}{2}$$

setzen kann; wodurch aus (20.)

$$2\varDelta\frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} = r^{-\frac{1}{2}t}.\frac{t.f(m)}{r^m} + r^{\frac{1}{2}t}.\frac{t.f(m+t)}{r^{m+t}}$$

folgt. Substituirt man hier die in (17.) und (19.) gefundenen Werthe von

$$\frac{t.f(m)}{r^m} \quad\text{und}\quad \frac{t.f(m+t)}{r^{m+t}},$$

so erhält man

$$2\varDelta\frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} = r^{-\frac{1}{2}t}\varDelta\frac{f(m)}{r^m}\{t+P(t,m)\} + r^{\frac{1}{2}t}.\varDelta\frac{f(m).P(t,m)}{r^m},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(22.)\qquad 2\varDelta\frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} = \varDelta\frac{f(m)}{r^m}\{r^{-\frac{1}{2}t}.t + (r^{\frac{1}{2}t}+r^{-\frac{1}{2}t})P(t,m)\}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $f(m)$ für ein hinlänglich grosses m zu Null wird, so erhält man durch Summirung

$$2\frac{f(m).P_1(t,m)}{r^m} = \frac{f(m)}{r^m}\{r^{-\frac{1}{2}t}.t + (r^{\frac{1}{2}t}+r^{-\frac{1}{2}t}).P(t,m)\}$$

und mithin nach Division durch $\frac{f(m)}{r^m}$

$$(23.)\qquad P_1(t,m) = \tfrac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}t}.t + \frac{r^{\frac{1}{2}t}+r^{-\frac{1}{2}t}}{2}.P(t,m),$$

welcher Werth von $P_1(t,m)$, in (15.) substituirt,

$$(24.)\qquad P(\tfrac{1}{2}t,m) = \tfrac{1}{4}tr^{-\frac{1}{2}t} + \left(\frac{r^{\frac{1}{4}t}+r^{-\frac{1}{4}t}}{2}\right)^2.P(t,m)$$

giebt. Setzen wir der Kürze willen

$$(25.)\qquad \psi(t) = \left(\frac{r^{\frac{1}{2}t}-r^{-\frac{1}{2}t}}{t}\right)^2.P(t,m)-\frac{1-r^{-t}}{t},$$

woraus

$$\psi(\tfrac{1}{2}t) = 4\left(\frac{r^{\frac{1}{4}t}-r^{-\frac{1}{4}t}}{t}\right)^2.P(\tfrac{1}{2}t,m)-\frac{2(1-r^{-\frac{1}{2}t})}{t}$$

folgt, so finden wir ohne Schwierigkeit mit Hülfe von (24.)

$$\psi(t) = \psi(\tfrac{1}{2}t)$$

und folglich

$$\psi(t)=\psi\left(\frac{t}{2}\right)=\psi\left(\frac{t}{2^2}\right)=\cdots=\psi\left(\frac{t}{2^n}\right),$$

d. h.

$$(26.)\qquad \psi(t) = k \quad \text{(constant)}.$$

Um den Werth von k zu bestimmen braucht man nur $t=1$ zu setzen; man findet nämlich unmittelbar aus (25.)

$$k=\psi(1)=(r^{\frac{1}{2}}-r^{-\frac{1}{2}})^2.P(1,m)-1+\frac{1}{r},$$

wofür auch, zufolge der in (2.) und (8.) angegebenen Bedeutungen von r und $P(1,m)$,

$$(27.)\qquad k = \frac{\varrho}{1+\varrho}\{\varrho.P(m)-1\}$$

geschrieben werden kann. Setzt man in die Gleichung (25.) k für $\psi(t)$ ein, so kann man unmittelbar folgenden sehr bemerkenswerthen Ausdruck für $P(t,m)$

$$(28.)\qquad P(t,m) = \frac{t}{r^t-1}\left\{1+\frac{kt}{1-r^{-t}}\right\},$$

aufstellen, wo k den in (27.) gefundenen Werth hat.

Der Satz, welcher in (28.) ausgesprochen ist — dass nämlich $P(t,m)$, so weit es von t abhängt, als eine sehr einfache Exponentialfunction von t sich ausdrücken lässt — ist für die Theorie der Leibrenten wichtig und reich an Folgerungen, von denen ich bei dieser Gelegenheit nur die folgende anführen will.

Entwickelt man in (28.) $r^t=(1+\varrho)^t$ nach dem Binomialsatze und behält im Endresultate nur die zwei ersten Potenzen ϱ und ϱ^2 bei, so findet

man die folgende einfache Gleichung

$$(29.)\qquad P(t, m) = P(m) + \frac{1-t}{2},$$

die für den praktischen Behuf im Allgemeinen hinreichend genau ist.

Für $t = \frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{4}$ folgen hieraus beziehungsweise die schon bekannten und allgemein benutzten Formeln

$$(30.)\qquad \begin{cases} P(\frac{1}{2}, m) = \frac{1}{4} + P(m), \\ P(\frac{1}{4}, m) = \frac{3}{8} + P(m). \end{cases}$$

Mariestad, 1877.

Beweis eines *Riemann*schen Satzes.

(Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg.)

Für die Ebene Z, die zur Repräsentation der Werthe der complexen Variable z dient, gilt der folgende Doppelsatz:

„Jede rationale Function der Variable z, die als solche immer auf die Form $\Sigma a_\varkappa z^\varkappa : \Sigma b_\varkappa z^\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k$; a, b Constanten, die auch theilweise Null sein können) gebracht werden kann, ist eine in der Z-Ebene einwerthige Function der complexen Variable z, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten unstetig von der ersten Art wird und im übrigen stetig bleibt.

Umgekehrt ist auch jede in der Z-Ebene einwerthige Function der complexen Variable z, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten unstetig von der ersten Art wird und im übrigen stetig bleibt, durch einen Ausdruck von der Form $\Sigma a_\varkappa z^\varkappa : \Sigma b_\varkappa z^\varkappa$ darstellbar, oder, was dasselbe, sie ist eine rationale Function von z."

Ein analoger Satz, von dem der eben hingestellte als specieller Fall aufgefasst werden kann, existirt für eine n-blättrige $\overline{2p+1}$-fach zusammenhangende *Riemann*sche Fläche T_z. Derselbe lässt sich wie folgt aussprechen:

„Repräsentirt die n-blättrige Fläche T_z die Verzweigung der algebraischen Function s von z, definirt als Wurzel der irreductiblen Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, so ist jede rationale Function $\varrho(z, s)$ von z und s, die als solche immer auf die Form $\Sigma a_{\varkappa\lambda} z^\varkappa s^\lambda : \Sigma b_{\varkappa\lambda} z^\varkappa s^\lambda$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k$; $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l$; a, b Constanten, die auch theilweise Null sein können) gebracht werden kann, eine in der Fläche T_z einwerthige Function der complexen Variable z, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten der Fläche unstetig von der ersten Art wird und im übrigen stetig bleibt.

Umgekehrt ist auch jede in der Fläche T_z einwerthige Function σ der complexen Variable z, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten der Fläche unstetig von der ersten Art wird und im übrigen stetig bleibt, durch einen Ausdruck von der Form $\Sigma a_{\varkappa\lambda} z^\varkappa s^\lambda : \Sigma b_{\varkappa\lambda} z^\varkappa s^\lambda$ darstellbar, oder, was dasselbe, sie ist eine rationale Function von z und s."

Dieser auf die Fläche T_s bezügliche, von *Riemann* herrührende Doppelsatz geht in den ursprünglichen über, wenn man $n = m = 1$ und $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) \equiv s - z$ setzt, wodurch dann T_s zur z-Ebene und $\varrho(z, s) \equiv \varrho(z, z)$ zu einer rationalen Function von z wird. Von den beiden Einzelsätzen, aus denen er besteht, beweist der erste sich unmittelbar und soll desshalb hier nicht weiter berücksichtigt werden. Der zweite, ungleich wichtigere dagegen ist bis jetzt noch nicht allgemein bewiesen, ja es scheint sogar, als ob die centrale Stellung, die er in dem Systeme der *Riemann*schen Functionentheorie einnimmt, und die hervorragende Rolle, die er bei fast allen Untersuchungen spielt, noch nicht gehörig erkannt seien.

Der von *Riemann* in seiner *„Theorie der Abelschen Functionen"* (dieses Journal Bd. 54) gegebene Beweis des Satzes setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Zunächst wird (Abschnitt 4, art. 5) aus Integralen erster und zweiter Gattung (die in der *Riemann*schen Theorie die Rolle von Fundamentalfunctionen spielen und nicht wie in anderen, auf algebraischer Grundlage aufgebauten Theorien als secundäre Gebilde auftreten) durch lineare Composition mit Hülfe von Constanten der allgemeine Ausdruck für eine in der n-blättrigen $\overline{2p+1}$-fach zusammenhangenden Fläche T_s einwerthige Function σ der complexen Variable z, die nur für eine endliche Anzahl μ ($\mu \geqq p+1$) von Punkten der Fläche unendlich von der ersten Ordnung (∞^1) wird, im übrigen aber stetig bleibt, hergestellt, und von demselben nachgewiesen, dass er im allgemeinen, d. h. wenn die Lagen der μ Punkte in keinen besonderen Beziehungen zu einander stehen, $\mu - p + 1$ willkürliche Constanten linear enthält. An späterer Stelle (Abschnitt 4, art. 8) wird dann gezeigt, dass, wenn s irgend eine algebraische Function von z bezeichnet, definirt als Wurzel einer irreductiblen Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, und diese Function s in der n-blättrigen Fläche T_s einwerthig ist, (oder mit anderen Worten s eine wie T_s verzweigte algebraische Function ist, und zwar im engeren Sinne, so dass nicht nur zu jedem Punkte der Fläche T_s ein Werth von s gehört, sondern auch jedem Paare zusammengehöriger Werthe z, s nur ein Punkt der Fläche entspricht) dann sich rationale, und als solche schon in T_s einwerthige, Ausdrücke $\varrho(z, s)$ von z und s bilden lassen, die für die μ Punkte, für die σ ∞^1 wird, ebenfalls ∞^1 werden und im übrigen stetig bleiben, die ferner lineare Functionen von $\mu - p + 1$ willkürlichen Constanten sind, und die demnach ebenfalls bei

passender Bestimmung der $\mu-p+1$ Constanten jede Function σ darstellen können.

Einen von dem obigen etwas verschiedenen, ebenfalls aus zwei Theilen bestehenden Beweis des Satzes hat später Herr *Betti* in seiner Abhandlung: „*Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa*" (Annali delle Università Toscane, T. VII) gegeben, indem er, wohl von dem Gedanken geleitet, dass ein algebraischer Satz auch mit nur algebraischen Hülfsmitteln bewiesen werden könne, den ersten Theil des *Riemann*schen Beweises durch eine rein algebraische Betrachtung ersetzte, dagegen den zweiten Theil desselben fast unverändert beibehielt.

Für beide Beweise ist charakteristisch und entscheidend die Methode der Constantenzählung, deren Anwendung mit fast unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft erscheint, sobald die μ Punkte sich in gewissen speciellen Lagen befinden, da dann die Anzahl der in dem allgemeinen Ausdrucke für σ enthaltenen willkürlichen Constanten, wie *Roch* in seiner Arbeit: „*Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen*" (dieses Journal Bd. 64) ausführlich nachgewiesen, nicht mehr $\mu-p+1$ beträgt, sondern mit der Lage der μ Punkte mannigfach variirt, und in Folge dessen die zum zweiten Theile des Beweises nöthige Construction der entsprechenden rationalen Ausdrücke von z und s — nicht nur für jede specielle Lage der μ Punkte, sondern auch für jede, durch specielle Lage ihrer Verzweigungspunkte ausgezeichnete Fläche T_z — eine unübersehbare Reihe von Untersuchungen erfordern würde. Unter diesen Umständen wird es gerechtfertigt sein, wenn ich im Folgenden für den erwähnten wichtigen Satz einen neuen Beweis gebe, der nicht nur ohne jede beschränkende Voraussetzung geführt wird, sondern auch mit den einfachsten, und zwar nur algebraischen Hülfsmitteln das vorgesteckte Ziel erreicht.

Gegeben sei also eine algebraische Function s von z, definirt als Wurzel einer irreductiblen Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, und zugleich die n-blättrige Fläche T_z, die die Verzweigung von s als Function von z darstellt. Gegeben sei ferner eine in der Fläche T_z einwerthige Function σ der complexen Variable z, die nur für die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_r$ der Fläche unstetig wird, und zwar unstetig von der ersten Art, d. h. $\infty^{q_1}, \infty^{q_2}, \ldots, \infty^{q_r}$ beziehlich (cf. R. A. F. Abschnitt 4, art. 2), die also mit anderen Worten nur $q_1+q_2+\cdots+q_r = \mu$

mal ∞^1 *wird in* T_z *und im übrigen stetig bleibt. Es soll bewiesen werden, dass* σ *eine rationale Function von* z *und* s *ist.*

Bildet man vermittelst der Function s von z die Fläche T_z über einer S-Ebene ab, so erhält man eine m-blättrige Fläche T_s, die die Verzweigung von z als Function von s darstellt, und es findet zwischen den beiden Flächen T_z und T_s nicht nur punktweises eindeutiges Entsprechen wechselweise statt, sondern auch, mit Ausnahme einzelner Punkte, (zu denen nur die unendlich entfernten Punkte und die Verzweigungspunkte der beiden Flächen sammt ihren Bildern in der jedesmal andern Fläche gehören können) sogenannte Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen. Jede in T_z einwerthige Function der complexen Variable z ist daher auch eine in T_s einwerthige Function der complexen Variable s, und besitzt in Folge dessen in je zwei entsprechenden Punkten P und P' der beiden Flächen (denen dasselbe Werthepaar z, s zukommt und von denen jeder als das Bild des andern angesehen werden kann) denselben Werth. Wird eine solche Function, als Function von z betrachtet, für den Punkt P der Fläche T_z unstetig von der ersten Art mit der Ordnungszahl q, also ∞^q, so wird sie, als Function von s betrachtet, im Punkte P' der Fläche T_s ebenfalls unstetig von der ersten Art mit derselben Ordnungszahl. Die oben definirte Function σ ist demnach auch eine in der Fläche T_s einwerthige Function der complexen Variable s, die nur für die Punkte P'_1, P'_2, ..., P'_r (die Bilder der Punkte P_1, P_2, ..., P_r) unstetig von der ersten Art wird, und zwar ∞^{q_1}, ∞^{q_2}, ..., ∞^{q_r} beziehlich, die also mit anderen Worten nur $q_1+q_2+\cdots+q_r = \mu$ mal ∞^1 wird in T_s und im übrigen stetig bleibt.

In Folge ihres Verhaltens in T_z und T_s genügt aber die Function σ zweien Gleichungen von der Form:

$$F(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z}) = 0, \quad F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s}) = 0,$$

(cf. R. A. F. Abschnitt 4, art. 5), deren linke Seiten rationale ganze Functionen — von den angegebenen Graden und im übrigen mit constanten Coefficienten — der jedesmal hinter dem Functionszeichen stehenden beiden Buchstaben sind, und von denen die erste, $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z}) = 0$, für irgend ein z nach σ aufgelöst gedacht, als Wurzeln die n Werthe der Function σ besitzt, die in den n, dem gewählten z entsprechenden Punkten der Fläche T_z sich

finden, während die zweite, $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s}) = 0$, für irgend ein s nach σ aufgelöst gedacht, als Wurzeln die m Werthe der Function σ besitzt, die in den m, dem gewählten s entsprechenden Punkten der Fläche T_s sich finden. Die Function $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z})$ ist dann, wie *Riemann* an der eben citirten Stelle bewiesen, unter allen Umständen eine ganze Potenz einer unzerfällbaren — d. h. nicht als ein Product aus ganzen Functionen von σ und z darstellbaren — ganzen Function von σ und z. Diese Potenz kann die erste sein, dann ist F_1 schon unzerfällbar. Dasselbe gilt für die Function F_2 von σ und s. Fixirt man irgend einen Punkt P_0 der Fläche T_z sowie den ihm entsprechenden Punkt P'_0 der Fläche T_s und bezeichnet die den Punkten P_0, P'_0 gemeinsam zukommenden Werthe von z, s mit z_0, s_0, den ihnen gemeinsam zukommenden Werth von σ mit σ_0, so existiren in der Fläche T_z ausser P_0 noch $n-1$ andere, übereinanderliegende Punkte $z_0, s_1; z_0, s_2; \ldots; z_0, s_{n-1}$, denen dasselbe $z = z_0$ zukommt, und in denen die Function σ die Werthe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ beziehlich haben möge; in der Fläche T_s dagegen ausser P'_0 noch $m-1$ andere, übereinanderliegende Punkte $z^{(1)}, s_0; \ldots; z^{(m-1)}, s_0$, denen dasselbe $s = s_0$ zukommt, und in denen die Function σ die Werthe $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(m-1)}$ beziehlich haben möge. Ein $(\nu-1)$-facher Verzweigungspunkt muss dabei aber ν-mal gezählt werden. Die n Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sind dann die n Wurzeln der Gleichung $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z_0}) = 0$, die m Grössen $\sigma_0, \sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(m-1)}$ die m Wurzeln der Gleichung $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s_0}) = 0$. Daraus folgt, dass die beiden Gleichungen $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z}) = 0$, $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s}) = 0$, sobald nur s und z durch die Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ verknüpft gedacht sind, für jedes Werthepaar z, s oder was dasselbe für jeden Punkt P der Fläche T_z immer wenigstens eine Wurzel gemein haben, da nach obigem der Werth, den die ursprünglich gegebene Function σ für den Punkt P besitzt, unter allen Umständen den beiden Gleichungen genügt.

Man kann sich nun, nach bekanntem Verfahren, den grössten gemeinschaftlichen Divisor D der Formen F_1 und F_2 von σ für einen beliebigen, keiner besondern Lagenbedingung unterworfenen Punkt z, s von T_z bestimmt denken. Ein solcher existirt jedenfalls, da die entsprechenden Gleichungen immer wenigstens eine Wurzel gemein haben, und ist demnach eine rationale ganze Function von σ vom Grade $\varkappa \geqq 1$, deren Coefficienten sich rational aus den Coefficienten der Potenzen von σ, die in F_1 und F_2 vor-

kommen, zusammensetzen, und demnach auch rationale Functionen von z und s sind. Die Bestimmung von D hat man sich in der Weise ausgeführt zu denken, dass die rationalen Functionen von z und s, die in dem zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors dienenden Systeme: $F_1 \equiv Q_1 F_2 + F_3$, $F_2 \equiv Q_2 F_3 + F_4$, ... als Coefficienten der in F_3, F_4, ... vorkommenden Potenzen des Buchstabens σ auftreten, sofort, mit Hülfe der Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, in die kanonische Form $c_0 + c_1 s + \cdots + c_{n-1} s^{n-1}$, wo die c rationale Functionen von z allein bezeichnen, gebracht werden. Da ein solcher Ausdruck nur dann für jeden Punkt z, s verschwinden kann, wenn alle c für jedes z Null sind, so lässt sich sofort erkennen, wie lange bei der Ausführung des erwähnten Verfahrens Restfunctionen F_3, F_4, ... auftreten, die nicht für jeden Punkt z, s verschwinden, und wann diejenige Restfunction $F_{\nu+1}$ erscheint, die für jeden Punkt z, s, einerlei was σ bedeutet, verschwindet. Mit dem Auftreten von $F_{\nu+1}$ ist das Verfahren beendigt, und die Function F_ν ist dann der gesuchte grösste gemeinschaftliche Divisor D, von der Form

$$D \equiv \varrho_0(z, s) + \varrho_1(z, s)\sigma + \cdots + \varrho_\varkappa(z, s)\sigma^\varkappa, \quad \varkappa \geqq 1,$$

wobei die ϱ rationale Functionen von z und s sind und $\varrho_0(z, s)$, $\varrho_\varkappa(z, s)$ nicht für jeden Punkt z, s verschwinden, während $\varrho_1(z, s)$, ..., $\varrho_{\varkappa-1}(z, s)$ auch theilweise oder alle durch identisches Verschwinden wegfallen können.

Ist auf diese Weise D und damit auch die Zahl $\varkappa$ bestimmt, so folgt weiter, dass die Gleichungen $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z}) = 0$, $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s}) = 0$ für jeden, keiner besonderen Lagenbedingung unterworfenen Punkt z, s immer $\varkappa$ und nicht mehr als $\varkappa$ Wurzeln gemein haben, die zugleich die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $D = 0$ sind. Für specielle Lagen des Punktes z, s dagegen können die beiden Gleichungen auch mehr als $\varkappa$ Wurzeln gemein haben, sobald nicht $\varkappa$ gleich der kleinsten der Zahlen n, m, und also D mit einer der Formen F_1, F_2 identisch ist. Seien Π_1, Π_2, ... solche specielle Punkte in T_s, für die die Gleichungen mehr als $\varkappa$ Wurzeln gemein haben; bezeichnet man dann die dem Punkte Π_ν entsprechenden Werthe von z, s mit z'_ν, s'_ν, wenn für $z = z'_\nu$, $s = s'_\nu$ wenigstens eine der n Wurzeln der Gleichung $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z}) = 0$ oder der m Wurzeln der Gleichung $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s}) = 0$ unendlich wird, dagegen mit z''_ν, s''_ν, wenn für $z = z''_\nu$, $s = s''_\nu$ die sämmtlichen Wurzeln der beiden Gleichungen endlich sind, so ist zunächst klar, dass

die Anzahl der mit z', s' bezeichneten Punkte Π nur eine bestimmte endliche sein kann, da überhaupt nur μ Werthe von z existiren, für die nicht sämmtliche n Wurzeln von $F_1 = 0$ endlich sind, und ebenso nur μ Werthe von s, für die nicht sämmtliche m Wurzeln von $F_2 = 0$ endlich sind. Aber auch die Anzahl der mit z'', s'' bezeichneten Punkte Π kann nur eine bestimmte endliche sein, indem für jeden solchen Punkt z, $s = z''_\nu, s''_\nu$ die Resultante R der beiden rationalen ganzen Functionen von σ

$$\frac{\varrho_\varkappa(z, s)}{\varphi(z)} \frac{F_1}{D} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_\varkappa(z, s)}{\psi(s)} \frac{F_2}{D},$$

— die aus F_1 und F_2 entstehen, indem man beide Formen durch ihren grössten gemeinschaftlichen Divisor D dividirt und den dadurch entstehenden rationalen ganzen Functionen von σ durch Multiplication mit den angegebenen Factoren (bei denen $\varrho_\varkappa(z, s)$, $\varphi(z)$, $\psi(s)$ die Coefficienten der höchsten Potenzen von σ in D, F_1, F_2 beziehlich bezeichnen) als Coefficienten der jedesmal höchsten Potenz von σ, $\sigma^{n-\varkappa}$ bei der ersten, $\sigma^{m-\varkappa}$ bei der zweiten, die Einheit verschafft — verschwinden muss. Nun ist aber diese Resultante R eine rationale Function von z und s, die, bei allgemeiner Lage des Punktes z, s, in die kanonische Form $c_0 + c_1 s + \cdots + c_{n-1} s^{n-1}$ gebracht, sich in besonderen Fällen auf eine Constante, aber nie durch identisches Verschwinden auf die Null reduciren kann, indem sonst $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ für jeden Punkt z, s mehr als $\varkappa$ Wurzeln gemein hätten. Da nun eine solche rationale Function von z und s immer nur für eine bestimmte endliche Anzahl von Punkten der Fläche T_s verschwinden kann, so folgt weiter, dass auch die Anzahl der mit z'', s'' bezeichneten Punkte Π nur eine bestimmte endliche sein kann. Sind also in der Fläche T_s Punkte Π, für die die Gleichungen $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z}) = 0$, $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s}) = 0$ mehr als $\varkappa$ Wurzeln gemein haben, überhaupt vorhanden, so ist die Anzahl dieser Punkte Π stets eine bestimmte endliche.

Ist nun $\varkappa = 1$, also $D \equiv \varrho_0(z, s) + \varrho_1(z, s)\sigma$, so haben die beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ für jeden von den Punkten Π verschiedenen Punkt z, s der Fläche T_s nur eine einzige Wurzel gemein, die demnach einerseits mit dem, dem Punkte z, s entsprechenden Werthe der ursprünglich gegebenen Function σ identisch ist, da dieser Werth unter allen Umständen den beiden Gleichungen genügt, andererseits aber auch als die Wurzel der Gleichung $D = 0$ auftritt. Daraus folgt, dass die ursprünglich

gegebene Function σ jedenfalls für alle von den Punkten Π verschiedenen Punkte z, s der Fläche T_s durch den Ausdruck

$$\sigma = -\frac{\varrho_0(z, s)}{\varrho_1(z, s)}$$

dargestellt wird, dann aber auch für die Punkte Π, da sowohl die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende rationale Function von z und s, ihrer Natur nach, als auch die auf der linken Seite stehende Function σ, der Voraussetzung nach, in T_s keine, durch Abänderung des Functionswerthes in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeiten besitzt. Für diesen Fall ($\varkappa = 1$) ist also der aufgestellte Satz bewiesen.

Es kann aber auch $\varkappa > 1$ sein. Dies findet immer statt, wenn die Formen $F_1(\overset{n}{\sigma}, \overset{\mu}{z})$ und $F_2(\overset{m}{\sigma}, \overset{\mu}{s})$ beide zerfällbar sind; es kann aber auch stattfinden, wenn die genannten Formen beide unzerfällbar sind, wie das Beispiel

$$F(s, z) \equiv s^9 + z^6 - 1, \qquad \sigma = z s,$$

$$\left.\begin{aligned} F_1(\sigma, z) &\equiv \sigma^9 + z^9(z^6 - 1), \\ F_2(\sigma, s) &\equiv \sigma^6 + s^6(s - 1), \end{aligned}\right\} \quad D \equiv -z^9 s^9 + z^6 s^6 \sigma^3$$

zeigt, bei dem die Zahlen n, m, μ, $\varkappa$ die Werthe 9, 6, 15, 3 beziehlich haben. In diesem Falle ist das, im Falle $\varkappa = 1$ zum Ziele führende Schlussverfahren nicht mehr anwendbar: vielmehr müsste hier zuerst nachgewiesen werden, dass rationale Functionen von z und s existiren, die der Gleichung $D = 0$ genügen, und ferner, dass unter diesen rationalen Functionen eine sich befindet, die sich für jeden Punkt z, s mit der gegebenen Function σ dem Werthe nach vollständig deckt. Unter diesen Umständen bedarf die Aufstellung des jetzt folgenden allgemeinen, nie versagenden Beweises keiner weitern Rechtfertigung.

Man fixire den gleich folgenden Bedingungen gemäss einen Punkt P_0 der Fläche T_z sowie den ihm entsprechenden Punkt P'_0 der Fläche T_s und bezeichne die den beiden Punkten gemeinsam zukommenden Werthe von z, s mit z_0, s_0. Dieser Punkt P_0 sei zunächst so gewählt, dass, unter Beibehaltung der früher aufgestellten Bezeichnung, die Grössen $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ sowie die Grössen $z_0, z^{(1)}, \ldots, z^{(m-1)}$ endlich sind: ferner so, dass keine zwei der Grössen $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ und ebenso keine zwei der Grössen $z_0, z^{(1)}, \ldots, z^{(m-1)}$ einander gleich sind, oder mit anderen Worten so, dass

die Form $\frac{\partial \overset{n\ m}{F}(s, z)}{\partial s}$ für keines der n Werthepaare $z_0, s_0;\ z_0, s_1;\ \ldots;\ z_0, s_{n-1}$; die Form $\frac{\partial \overset{n\ m}{F}(s, z)}{\partial z}$ für keines der m Werthepaare $z_0, s_0;\ z^{(1)}, s_0;\ \ldots;\ z^{(m-1)}, s_0$ verschwindet; endlich so, dass die Werthe $\sigma_0, \sigma_1, \ldots;\ \sigma_{n-1}, \sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(m-1)}$, die die gegebene Function σ für die $n+m-1$, durch die angeführten Werthepaare bestimmten Punkte besitzt, sämmtlich endlich und auch von Null verschieden sind. Durch diese drei Bedingungen wird, wie aus dem Vorangegangenen erhellt, nur eine endliche Anzahl von Lagen für den Punkt P_0 ausgeschlossen, und es kann also der Punkt P_0 auf unendlich viele Weisen den genannten Bedingungen entsprechend gewählt werden.

Unter Festhaltung des gewählten Punktes z_0, s_0 bezeichne man mit $\varphi(z)$ den Ausdruck

$$\varphi(z) = \frac{(z - z^{(1)})(z - z^{(2)})\ldots(z - z^{(m-1)})}{(z_0 - z^{(1)})(z_0 - z^{(2)})\ldots(z_0 - z^{(m-1)})},$$

(dessen Nenner, den gemachten Voraussetzungen zufolge, von Null verschieden ist), so ist $\varphi(z)$ als rationale ganze Function von z eine in T_z einwerthige Function der complexen Variable z, und also auch eine in T_s einwerthige Function der complexen Variable s. Bildet man dann aus $\varphi(z)$ und der gegebenen Function σ durch Multiplication eine neue Function Σ,

$$\Sigma = \varphi(z)\,\sigma,$$

deren Werth für jeden Punkt z, s von T_z oder T_s demnach definirt ist als das Product der Werthe, die $\varphi(z)$ und σ in dem betreffenden Punkte beziehlich besitzen: so ist Σ ebenfalls eine in T_z einwerthige Function der complexen Variable z, die nur ν-mal (ν eine bestimmte von Null verschiedene ganze Zahl) ∞^1 wird in T_z und im übrigen stetig bleibt; zugleich also auch eine in T_s einwerthige Function der complexen Variable s, die nur ν-mal ∞^1 wird in T_s und im übrigen stetig bleibt. In Folge dessen genügt die Function Σ zweien Gleichungen von der Form

$$F_{(1)}(\overset{n\ \nu}{\Sigma, z}) = 0, \quad F_{(2)}(\overset{m\ \nu}{\Sigma, s}) = 0,$$

deren linke Seiten rationale ganze Functionen — von den angegebenen Graden und im übrigen mit constanten Coefficienten — der jedesmal hinter dem Functionszeichen stehenden beiden Buchstaben sind, und von denen die erste, für irgend ein z nach Σ aufgelöst gedacht, als Wurzeln die

n Werthe der Function Σ besitzt, die in den n, dem betreffenden z entsprechenden übereinanderliegenden Punkten der Fläche T_z sich finden, während die zweite, für irgend ein s nach Σ aufgelöst gedacht, als Wurzeln die m Werthe der Function Σ besitzt, die in den m, dem betreffenden s entsprechenden übereinanderliegenden Punkten der Fläche T_s sich finden. Ein $(\nu-1)$-facher Verzweigungspunkt muss dabei aber ν-mal gezählt werden. Die beiden Gleichungen $F_{(1)}(\overset{n}{\Sigma}, \overset{\nu}{z}) = 0$, $F_{(2)}(\overset{m}{\Sigma}, \overset{\nu}{s}) = 0$ haben demnach, sobald nur s und z durch die Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ verknüpft gedacht sind, für jedes Werthepaar z, s oder was dasselbe für jeden Punkt P der Fläche T_z immer wenigstens eine Wurzel gemein, da der Werth, den die Function Σ für den Punkt P besitzt, unter allen Umständen den beiden Gleichungen genügt.

Für den zu Anfang fixirten Punkt P_0, dem das specielle Werthepaar z_0, s_0 entspricht, haben die beiden Gleichungen nur eine einzige Wurzel gemein. Bezeichnet man nämlich mit $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{n-1}, \Sigma^{(1)}, \ldots, \Sigma^{(m-1)}$ die den $n+m-1$ Punkten z_0, s_0; z_0, s_1; $\ldots$; z_0, s_{n-1}; $z^{(1)}, s_0$; $\ldots$; $z^{(m-1)}, s_0$ beziehlich entsprechenden Werthe der Function Σ, so sind $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{n-1}$ die n Wurzeln der Gleichung $F_{(1)}(\overset{n}{\Sigma}, \overset{\nu}{z_0}) = 0$, $\Sigma_0, \Sigma^{(1)}, \ldots, \Sigma^{(m-1)}$ die m Wurzeln der Gleichung $F_{(2)}(\overset{m}{\Sigma}, \overset{\nu}{s_0}) = 0$, und es ist

$$\Sigma_0 = \varphi(z_0)\sigma_0, \quad \begin{matrix} \Sigma_1 = \varphi(z_0)\,\sigma_1, & \Sigma_2 = \varphi(z_0)\,\sigma_2, & \ldots, & \Sigma_{n-1} = \varphi(z_0)\,\sigma_{n-1}, \\ \Sigma^{(1)} = \varphi(z^{(1)})\,\sigma^{(1)}, & \Sigma^{(2)} = \varphi(z^{(2)})\sigma^{(2)}, & \ldots, & \Sigma^{(m-1)} = \varphi(z^{(m-1)})\,\sigma^{(m-1)}, \end{matrix}$$

oder auch, da $\varphi(z_0) = 1$, $\varphi(z^{(1)}) = \varphi(z^{(2)}) = \cdots = \varphi(z^{(m-1)}) = 0$, und die vorkommenden σ der Voraussetzung gemäss sämmtlich endlich sind,

$$\Sigma_0 = \sigma_0, \quad \begin{matrix} \Sigma_1 = \sigma_1, & \Sigma_2 = \sigma_2, & \ldots, & \Sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}, \\ \Sigma^{(1)} = 0, & \Sigma^{(2)} = 0, & \ldots, & \Sigma^{(m-1)} = 0. \end{matrix}$$

Berücksichtigt man nun noch, dass der Voraussetzung gemäss auch alle vorkommenden σ von Null verschieden sind, so folgt, dass die beiden Gleichungen für den Punkt z_0, s_0 nur eine einzige Wurzel, Σ_0, gemein haben.

Denkt man sich jetzt nach der im vorigen Abschnitte ausführlich erklärten Methode den grössten gemeinschaftlichen Divisor D' der Formen $F_{(1)}$ und $F_{(2)}$ von Σ für einen beliebigen, keiner besondern Lagenbedingung unterworfenen Punkt z, s von T_z bestimmt, so hat D' die Form

$$D' \equiv r_0(z, s) + r_1(z, s)\,\Sigma + \cdots + r_\varkappa(z, s)\,\Sigma^\varkappa, \quad \varkappa \geqq 1,$$

wobei die r rationale Functionen von z und s sind und $r_0(z, s)$, $r_\varkappa(z, s)$ nicht für jeden Punkt z, s verschwinden. Wäre nun $\varkappa > 1$, so würden die Gleichungen $F_{(1)}(\overset{n}{\Sigma}, \overset{\nu}{z}) = 0$, $F_{(2)}(\overset{m}{\Sigma}, \overset{\nu}{s}) = 0$, für jeden Punkt z, s ohne Ausnahme zum mindesten $\varkappa$ Wurzeln gemein haben, während sie doch für den Punkt z_0, s_0 nur eine einzige Wurzel gemein haben. Es kann also $\varkappa$ nicht grösser als 1 sein, und es besitzt demnach D' die Form

$$D' \equiv r_0(z, s) + r_1(z, s)\Sigma.$$

Daraus folgt aber, genau in derselben Weise wie im vorigen Abschnitte schliessend, dass die Function $\Sigma = \varphi(z)\sigma$ für jeden Punkt z, s der Fläche T_z durch den Ausdruck

$$\Sigma = -\frac{r_0(z, s)}{r_1(z, s)}$$

dargestellt wird, und die ursprünglich gegebene Function σ demnach für jeden Punkt z, s der Fläche T_z durch den Ausdruck

$$\sigma = -\frac{r_0(z, s)}{\varphi(z) r_1(z, s)},$$

womit der aufgestellte Satz bewiesen.

Würzburg, im März 1877.

Ueber das *Grassmann*sche Gesetz der ponderomotorischen Kraft.

(Von Herrn *R. Clausius* in Bonn.)

Herr *H. Grassmann* macht auf S. 57. d. B. darauf aufmerksam, dass die Ausdrücke, welche man aus dem von mir aufgestellten elektrodynamischen Grundgesetze *) für die Componenten der ponderomotorischen Kraft zwischen zwei Stromelementen ableiten kann, genau mit dem von ihm schon i. J. 1845 für diese Kraft aufgestellten Gesetze **) übereinstimmen. Dass mir dieses entgangen war, hat seinen Grund in einem eigenthümlichen Umstande. Ich wusste sehr wohl, dass Herr *Grassmann* ein von dem *Ampère*schen abweichendes Gesetz für die ponderomotorische Kraft aufgestellt hat, indem ich seine interessante Abhandlung vor langer Zeit gelesen hatte, ohne mir jedoch damals, wo ich mich nicht speciell mit dem Gegenstande beschäftigte, die betreffende Formel fest einzuprägen. Als nun aus dem auf die gegenseitige Einwirkung bewegter Elektricitätstheilchen bezüglichen neuen Grundgesetze auch für die zwischen zwei Stromelementen wirkende ponderomotorische Kraft neue Ausdrücke hervorgingen, welche mit dem *Ampère*schen Gesetze nicht übereinstimmten, dachte ich sofort daran, sie mit dem *Grassmann*schen Gesetze zu vergleichen; da mir aber jener alte Band von *Poggendorffs* Annalen nicht zur Hand war, so schlug ich den betreffenden Jahrgang der „Fortschritte der Physik" nach. Hier ***) fand ich einen Auszug der *Grassmann*schen Abhandlung und darin eine Formel, welche als die *Grassmann*sche angeführt ist. Diese verglich ich mit den aus dem Grundgesetze hervorgehenden Ausdrücken, und da ich sie mit denselben nicht übereinstimmend fand, so betrachtete ich damit die Frage als erledigt, indem ich keinen Grund hatte, an der richtigen Wiedergabe der Formel zu zweifeln, und deshalb auf eine weitere Prüfung oder Controle einzugehen.

*) Dieses Journal Bd. 82, S. 85.
**) *Poggendorffs* Annalen Bd. 64, S. 1.
***) Fortschritte der Physik Bd. I (1845), S. 525.

Jetzt aber ersehe ich aus der Note des Herrn *Grassmann*, infolge deren ich mir auch seine Originalabhandlung verschafft habe, dass mein Vertrauen auf jenen Auszug mich getäuscht hat, denn die Formel ist in demselben in der That unrichtig wiedergegeben. Herr *Grassmann* hat nämlich das Stromelement, welches die Kraft erleidet, mit b, und die Projection desselben auf eine gewisse Ebene mit b_1 bezeichnet. In seiner Formel kommt nun die Grösse b_1 vor, in jenem Auszuge aber steht an Stelle derselben b. Dass hierin eine Abweichung von der Originalabhandlung liege, konnte mir um so weniger in den Sinn kommen, als in drei der Schlussformel voraufgehenden Formeln ebenfalls immer b statt b_1 steht, und überhaupt das Zeichen b_1 mit seiner Erklärung in dem ganzen Auszuge nicht vorkommt.

Nachdem ich nun die richtige Formel kennen gelernt habe, kann ich natürlich nur bestätigen, was Herr *Grassmann* sagt, dass sie mit den aus dem neuen Grundgesetze hervorgehenden Ausdrücken vollkommen übereinstimmt, und ich freue mich, mit einem so gelehrten und scharfsinnigen Forscher in Untersuchungen, die auf ganz verschiedenen Wegen geführt sind, zusammengetroffen zu sein.

Bonn, im Mai 1877.

Preisaufgabe der Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung *Hansens* „Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter", abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und *Hansen* verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen befindet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns" ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung *Hansens* enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von *Leverrier* ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie *Hansen*, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der *Hansen*schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

die ergänzende Berechnung der vollständigen Jupitersstörungen nach den von *Hansen* angegebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, sie müssen mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November 1879, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Schreiben an Herrn *Borchardt* über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen.

(Von Herrn *R. Dedekind* in Braunschweig.)

Sie haben mich aufgefordert, eine etwas ausführlichere Darstellung der Untersuchungen auszuarbeiten, von welchen ich, durch das Erscheinen der Abhandlung von *Fuchs* *) veranlasst, mir neulich erlaubt habe Ihnen eine kurze Uebersicht mitzutheilen; indem ich Ihrer Einladung hiermit Folge leiste, beschränke ich mich im Wesentlichen auf den Theil dieser Untersuchungen, welcher mit der eben genannten Abhandlung zusammenhängt, und ich bitte Sie auch, die Uebergehung einiger Nebenpunkte entschuldigen zu wollen, da es mir im Augenblick an Zeit fehlt, alle Einzelheiten auszuführen. Die in Rede stehenden Untersuchungen habe ich schon vor einer Reihe von Jahren angestellt, als ich erkannte, dass die Bestimmung der Anzahl der Idealclassen in kubischen Körpern (d. h. in Gebieten von Zahlen, welche aus Wurzeln von Gleichungen dritten Grades gebildet sind) innig zusammenhängt mit der Theorie der singulären Moduln der elliptischen Functionen, für welche die complexe Multiplication stattfindet. Bei meinen Versuchen, tiefer in diese mir unentbehrliche Theorie einzudringen und mir einen einfachen Weg zu den ausgezeichnet schönen Resultaten von *Kronecker* zu bahnen, die leider noch immer so schwer zugänglich sind, erkannte ich sogleich die fundamentale Wichtigkeit des Punktes, auf welchen auch *Hermite* neulich in einer Anmerkung zu der Abhandlung von *Fuchs* (Seite 29) aufmerksam gemacht hat, und welcher in der That zur Grundlage für meine Theorie geworden ist. Es handelt sich um Folgendes. Bedeutet

$$\omega = \frac{K'i}{K}$$

das Periodenverhältniss der elliptischen Functionen ($= Hi$ nach der Bezeichnung von *Fuchs*), so ist das Quadrat $k = \varkappa^2$ des Integralmoduls $\varkappa$ eine einwerthige Function von ω, welche *Hermite* mit $\varphi(\omega)^8$ bezeichnet, und aus

---

*) Im ersten Hefte dieses Bandes S. 13.

der Transformation erster Ordnung folgt leicht, dass k unverändert bleibt, wenn ω durch

$$\omega_1 = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$$

ersetzt wird, wo α, β, γ, δ vier ganze rationale Zahlen bedeuten, welche der Bedingung

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1$$

genügen, und von denen β, γ gerade sind. Der zu beweisende Satz besteht nun darin, dass ausser diesen Zahlen ω_1 keine andere existirt, welche denselben Werth $k = \varphi(\omega)^8 = \varphi(\omega_1)^8$ hervorbringt. Bevor ich zur Darstellung meiner Theorie übergehe, will ich zunächst zeigen, dass dieser Satz sich auch aus der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen ohne Schwierigkeit ableiten lässt.

Bedeutet ω eine complexe Grösse mit positiv-imaginärem Bestandtheil, ferner z eine willkürliche Variable, und bedient man sich der folgenden Bezeichnungen

$$1^z = e^{2\pi iz},$$

$$\vartheta\,(z,\omega) = \Sigma 1^{s^2\frac{\omega}{2}+s(z-\frac{1}{2})},$$

$$\vartheta_1(z,\omega) = \Sigma 1^{(s+\frac{1}{2})^2\frac{\omega}{2}+(s+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})},$$

$$\vartheta_2(z,\omega) = \Sigma 1^{(s+\frac{1}{2})^2\frac{\omega}{2}+(s+\frac{1}{2})z},$$

$$\vartheta_3(z,\omega) = \Sigma 1^{s^2\frac{\omega}{2}+sz},$$

wo s alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, ferner

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_2(0,\omega)}{\vartheta_3(0,\omega)} = \varphi(\omega)^2; \quad \sqrt{\varkappa'} = \frac{\vartheta(0,\omega)}{\vartheta_3(0,\omega)} = \psi(\omega)^2,$$

so ist

$$\varkappa^2+\varkappa'^2 = 1,$$

und man kann

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{\vartheta_1(z,\omega)}{\vartheta(z,\omega)} = \sin\operatorname{am}(2Kz,\varkappa),$$

$$\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{\varkappa'}}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{\vartheta_2(z,\omega)}{\vartheta(z,\omega)} = \cos\operatorname{am}(2Kz,\varkappa),$$

$$\sqrt{1-\varkappa^2 x} = \sqrt{\varkappa'}\,\frac{\vartheta_3(z,\omega)}{\vartheta(z,\omega)} = \Delta\operatorname{am}(2Kz,\varkappa),$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dz} = 2K\sqrt{1-x}\sqrt{1-\varkappa^2 x}$$

setzen, wo

$$2K = \frac{\vartheta_2(0,\omega)\vartheta_1'(0,\omega)}{\vartheta(0,\omega)\vartheta_2(0,\omega)} = \pi\,\vartheta_3(0,\omega)^2$$

ist. Wenn nun die Grösse ω_1 ebenfalls einen positiv-imaginären Bestandtheil hat und denselben Werth

$$\frac{\vartheta_2(0,\omega_1)^4}{\vartheta_3(0,\omega_1)^4} = \varkappa_1^2 = \varkappa^2 = k$$

hervorbringt, wie ω, so setze man

$$2K_1 = \pi\,\vartheta_3(0,\omega_1)^2$$

und führe eine neue Variable z_1 durch die Gleichung

$$K_1 z_1 = K z$$

ein; wenn ferner mit $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{1-x_1}$, $\sqrt{1-kx_1}$ die Grössen bezeichnet werden, welche ebenso von z_1, ω_1 abhängen, wie $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$, $\sqrt{1-kx}$ von z, ω, so ergiebt sich

$$\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-kx}} = \frac{d\sqrt{x_1}}{\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-kx_1}},$$

und hieraus durch Integration

$$\sqrt{x}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-kx_1} - \sqrt{x_1}\sqrt{1-x}\sqrt{1-kx} = C(1-kxx_1);$$

die Constante C muss aber gleich Null sein, weil für $z=0$ auch $z_1=0$ ist, also $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x_1}$ gleichzeitig verschwinden. Hieraus folgt, dass identisch $x = x_1$ ist (ja sogar $\sqrt{x}=\sqrt{x_1}$, $\sqrt{1-x}=\sqrt{1-x_1}$, $\sqrt{1-kx}=\sqrt{1-kx_1}$); mithin wird jede der vier Functionen

$$\vartheta(z,\omega),\quad \vartheta_1(z,\omega),\quad \vartheta_2(z,\omega),\quad \vartheta_3(z,\omega)$$

stets und nur dann verschwinden, wenn die entsprechende der vier Functionen

$$\vartheta(z_1,\omega_1),\quad \vartheta_1(z_1,\omega_1),\quad \vartheta_2(z_1,\omega_1),\quad \vartheta_3(z_1,\omega_1)$$

verschwindet. Die Function $\vartheta_1(z,\omega)$ verschwindet aber für alle Werthe $z = r + s\omega$ und nur*) für diese, wo r, s willkürliche ganze Zahlen bedeuten; setzt man daher

$$z_1 = 1, \quad \text{so wird} \quad z = \frac{K_1}{K} \quad = \alpha + \beta\omega,$$

$$z_1 = \omega_1, \quad \text{so wird} \quad z = \frac{K_1}{K}\omega_1 = \gamma + \delta\omega,$$

*) Dies folgt aus der Darstellung von $\vartheta_1(z,\omega)$ als unendliches Product, oder auch aus dem Satze $\int d\log\vartheta_1(z,\omega) = 2\pi i$, wo die Integration durch die Begrenzung eines elementaren Parallelogramms erstreckt ist.

wo α, β, γ, δ ganze rationale Zahlen bedeuten; mithin ist

$$(1.) \qquad \omega_1 = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}, \quad (\alpha+\beta\omega)z_1 = z.$$

Setzt man umgekehrt

$$z = 1, \quad \text{so wird} \quad z_1 = \alpha_1+\beta_1\omega_1,$$
$$z = \omega, \quad \text{so wird} \quad z_1 = \gamma_1+\delta_1\omega_1,$$

wo α_1, β_1, γ_1, δ_1 ebenfalls ganze Zahlen bedeuten; es wird daher

$$(\alpha+\beta\omega)\alpha_1+(\gamma+\delta\omega)\beta_1 = 1,$$
$$(\alpha+\beta\omega)\gamma_1+(\gamma+\delta\omega)\delta_1 = \omega,$$

woraus, weil ω nicht reell ist,

$$\alpha\alpha_1+\gamma\beta_1 = 1, \quad \beta\alpha_1+\delta\beta_1 = 0,$$
$$\alpha\gamma_1+\gamma\delta_1 = 0, \quad \beta\gamma_1+\delta\delta_1 = 1,$$

also

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1) = 1,$$

mithin

$$\alpha\delta-\beta\gamma = \alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1 = \pm 1$$

folgt.*) Hierin darf aber zufolge (1.) nur das obere Zeichen genommen werden, weil der Coefficient von i in beiden Grössen ω und ω_1 dasselbe (positive) Vorzeichen hat; also ist

$$(2.) \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = +1.$$

Da ferner die Werthe von z_1, für welche $\vartheta(z_1, \omega_1)$ verschwindet, mit den Werthen $r+(s+\frac{1}{2})\omega_1$ zusammen fallen, so wird gleichzeitig

$$z = \frac{\omega}{2}, \quad z_1 = r+(s+\tfrac{1}{2})\omega_1;$$

mithin ist zufolge (1.)

$$(\alpha+\beta\omega)r+(\gamma+\delta\omega)(s+\tfrac{1}{2}) = \frac{\omega}{2},$$
$$\alpha r+\gamma(s+\tfrac{1}{2}) = 0,$$

also

$$(3.) \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{2}.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich aus dem gleichzeitigen Verschwinden der Functionen $\vartheta_2(z, \omega)$, $\vartheta_2(z_1, \omega_1)$ für $z = \frac{1}{2}$ auch

$$(4.) \qquad \beta \equiv 0 \pmod{2},$$

womit der in Rede stehende Satz vollständig bewiesen ist.

---

*) Dies ist nur ein specieller Fall eines allgemeinen Satzes aus der Theorie der Zahlensysteme, welche ich *endliche Moduln* genannt habe.

Dieser Beweis beruht offenbar darauf, dass die elliptischen Functionen $\sin\mathrm{am}(u, \varkappa)$, $\cos\mathrm{am}(u, \varkappa)$, $\Delta\mathrm{am}(u, \varkappa)$ einwerthige Functionen auch von $k = \varkappa^2$ sind. Der Satz selbst reizte mich aber bald, den Zusammenhang zwischen den Grössen ω, k, K ganz unabhängig von der Theorie der elliptischen Functionen zu erforschen, und in diesem Streben bestärkte mich eine Bemerkung von *Hermite*, welcher an einer Stelle seiner kurzen Uebersicht über die Theorie der elliptischen Functionen hervorhebt, dass noch kein anderer Weg zu diesen Modul-Functionen führe, als der, welchen die Gründer der Theorie der elliptischen Functionen eingeschlagen haben. Ich erlaube mir nun, Ihnen meine damals entstandene Theorie in ihren Grundzügen zu entwickeln; die Anwendung auf die Theorie der singulären Moduln, derentwegen die ganze Untersuchung angestellt ist, darf ich Ihnen vielleicht ein anderes Mal vorlegen.

§. 1. Aequivalente Zahlen.

Zwei Zahlen ω, ω_1 sollen im Folgenden *aequivalent* heissen, wenn es vier ganze (rationale) Zahlen α, β, γ, δ giebt, welche den beiden Bedingungen

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen; offenbar ist die hierdurch ausgedrückte Beziehung zwischen ω, ω_1 eine gegenseitige, da zugleich die vier Zahlen δ, $-\beta$, $-\gamma$, α den Bedingungen

$$\omega = \frac{(-\gamma) + \alpha\omega_1}{\delta + (-\beta)\omega_1}, \quad \delta\alpha - (-\beta)(-\gamma) = 1$$

genügen. Ist nun ω_2 ebenfalls aequivalent mit ω, giebt es also vier ganze Zahlen α_1, β_1, γ_1, δ_1, welche den Bedingungen

$$\omega = \frac{\gamma_1 + \delta_1\omega_2}{\alpha_1 + \beta_1\omega_2}, \quad \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 1$$

genügen, so setze man in üblicher Weise

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix},$$

d. h.

$$\alpha' = \alpha\alpha_1 + \beta\gamma_1, \quad \beta' = \alpha\beta_1 + \beta\delta_1,$$
$$\gamma' = \gamma\alpha_1 + \delta\gamma_1, \quad \delta' = \gamma\beta_1 + \delta\delta_1;$$

da diese Zahlen α', β', γ', δ' den beiden Bedingungen

$$\omega_1 = \frac{\gamma' + \delta'\omega_2}{\alpha' + \beta'\omega_2}, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$$

genügen, so folgt, dass je zwei mit einer und derselben Zahl ω aequivalente Zahlen ω_1, ω_2 auch mit einander aequivalent sind. Aus diesem Grunde wird man das gesammte Zahlengebiet in *Classen* eintheilen können, indem man je zwei Zahlen in dieselbe oder in zwei verschiedene Classen aufnimmt, je nachdem sie aequivalent sind oder nicht. Jede Zahl ω kann als *Repraesentant* derjenigen Classe angesehen werden, welche aus allen mit ω aequivalenten Zahlen besteht.

Nennt man die reellen Zahlen x, y die Coordinaten, und zwar x die Abscisse, y die Ordinate der aus ihnen gebildeten complexen Zahl $\omega = x+yi$, so ergiebt sich leicht, dass die Ordinaten von je zwei aequivalenten Zahlen ω, ω_1 dasselbe Vorzeichen haben, oder beide verschwinden. Wir werden im Folgenden das Gebiet S derjenigen Zahlen ω betrachten, deren Ordinaten *positiv* sind, und ausserdem nur noch die *rationalen* reellen Zahlen, welche letzteren offenbar eine einzige Classe R bilden, weil sie sämmtlich mit der Zahl 0 aequivalent sind; es wird sich zeigen, dass diese Classe R, welche zugleich die Zahl ∞ enthält, als die vollständige *Begrenzung* des Gebietes S anzusehen ist.

§. 2. Vollständiges Repraesentanten-System.

Es kommt nun darauf an, ein vollständiges System von Repraesentanten ω_0 aller Classen aufzustellen, aus welchen das Gebiet S besteht, in der Weise, dass jede Zahl ω dieses Gebietes mit einem, und im Allgemeinen auch nur mit einem dieser Repraesentanten ω_0 aequivalent ist. Dies geschieht durch den folgenden Satz, in welchem das Zeichen $N(x+yi)$ die Norm (x^2+y^2) der complexen Zahl $x+yi$ bedeutet:

In jeder Classe des Gebietes S einschl. R giebt es einen, und im Allgemeinen auch nur einen Repraesentanten ω_0, welcher den drei Bedingungen

$$(1.)\quad N(\omega_0-1) \geqq N(\omega_0),$$
$$(2.)\quad N(\omega_0+1) \geqq N(\omega_0),$$
$$(3.)\quad N(\omega_0) \geqq 1$$

genügt.

Der Beweis kann mit denselben Mitteln geführt werden, durch welche in der Theorie der binären quadratischen Formen von negativer Determinante bewiesen wird, dass jede solche Form einer, und im Allgemeinen auch nur einer *reducirten* Form aequivalent ist. Ich will mich hier begnügen, den ersten Theil des Satzes durch die folgende Betrachtung zu erledigen. Ist

ω eine bestimmte Zahl des Gebietes S, so giebt es, weil ω nicht reell ist, unter allen Paaren von relativen Primzahlen α, β mindestens eins, für welches $N(\alpha+\beta\omega)$ so klein wie möglich wird; nachdem α, β so gewählt sind, erhält man alle Lösungen der Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ in ganzen Zahlen γ, δ aus einer einzigen Lösung γ', δ', indem man $\gamma=\gamma'-m\alpha$, $\delta=\delta'-m\beta$ setzt und m alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt; wählt man m so, dass

$$N\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = N\left(\frac{\gamma'+\delta'\omega}{\alpha+\beta\omega}-m\right)$$

möglichst klein wird, so hat die mit ω aequivalente Zahl

$$\omega_0 = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega},$$

die in (1.), (2.), (3.) ausgedrückten Eigenschaften. Denn aus der Definition von α, β folgt, dass ω_0 der Bedingung (3.) genügt, und ebenso aus der Definition von m, dass ω_0 den Bedingungen (1.) und (2.) genügt.

Geometrisch wird der Inbegriff aller dieser Zahlen ω_0 durch ein Stück der Halbebene S dargestellt, welches das Hauptfeld heissen und mit (ω_0) bezeichnet werden soll. Dasselbe ist begrenzt durch drei Linien, welche den Gleichheitszeichen in den Bedingungen (1.), (2.), (3.) entsprechen; setzt man $\omega_0=x_0+y_0 i$, so nehmen die letzteren die folgende Gestalt an:

$$(1.)\quad x_0 \leqq \tfrac{1}{2},$$
$$(2.)\quad x_0 \geqq -\tfrac{1}{2},$$
$$(3.)\quad x_0^2+y_0^2 \geqq 1;$$

das Feld (ω_0) liegt daher zwischen den beiden Geraden, welche in den Abständen $\pm\frac{1}{2}$ parallel mit der Ordinatenaxe laufen, und zugleich ausserhalb des Halbkreises, welcher mit dem Radius Eins aus dem Nullpunkte beschrieben ist. Dieses Feld wird offenbar durch die Ordinatenaxe in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Die beiden Parallelen (2.) und (1.) schneiden sich im Punkte ∞, dem Repraesentanten der Classe R der rationalen Zahlen, und sie schneiden den Kreis in den Punkten

$$\varrho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad -\varrho^2 = 1+\varrho = \frac{-1}{\varrho},$$

während die Symmetrieaxe den Kreis im Punkte

$$i = \frac{-1}{i}$$

schneidet.

Wenn nun ω_0 der Grenzlinie (2.) angehört, d. h. wenn $x_0 = -\frac{1}{2}$ ist, so leuchtet ein, dass die aequivalente Zahl $1+\omega_0$ der Grenzlinie (1.) angehört, und diese beiden Punkte ω_0, $1+\omega_0$ liegen symmetrisch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe. Wenn ferner ω_0 der Kreislinie (3.) angehört, so gilt dasselbe von der aequivalenten Zahl $\frac{-1}{\omega_0} = -x_0 + y_0 i$, und diese beiden Punkte ω_0, $\frac{-1}{\omega_0}$ liegen ebenfalls symmetrisch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe. Je zwei symmetrische Punkte der Begrenzung von (ω_0) sind daher Repraesentanten einer und derselben Classe. Es liesse sich nun auch leicht zeigen, dass ausser diesen Fällen niemals zwei verschiedene Punkte oder Zahlen des Feldes (ω_0) derselben Classe angehören können, mögen sie im Innern oder auf der Begrenzung von (ω_0) liegen. Der Kürze halber unterdrücke ich diesen Beweis, welcher, wie schon oben bemerkt, genau ebenso lautet, wie der Beweis des Satzes, dass zwei verschiedene reducirte binäre quadratische Formen von negativer Determinante nur in gewissen Ausnahmefällen aequivalent sein können (vergl. Zahlentheorie von *Dirichlet*, zweite Auflage, §. 65); es wird genügen zu bemerken, dass, wenn x, y willkürliche Variable bedeuten, die binäre quadratische Form

$$N(x+y\omega_0) = (1, x_0, x_0^2+y_0^2),$$

deren Determinante $= -y_0^2$, immer eine *reducirte* ist, wenn dieser Begriff auf Formen mit gebrochenen oder irrationalen reellen Coefficienten übertragen wird.

Sind nun α, β, γ, δ vier bestimmte ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und setzt man

$$\omega_0 = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}, \quad \omega = \frac{-\gamma+\alpha\omega_0}{\delta-\beta\omega_0},$$

so entspricht, wie man leicht erkennt, dem Hauptfelde (ω_0) ein Feld (ω), welches von drei Kreisbogen begrenzt wird, deren Mittelpunkte stets in der Abscissenaxe liegen, und welche in gerade Linien ausarten können; die den Eckpunkten

$$\varrho, \quad -\varrho^2, \quad \infty$$

des Hauptfeldes entsprechenden Eckpunkte des Feldes (ω) sind

$$\frac{-\gamma+\alpha\varrho}{\delta-\beta\varrho}, \quad \frac{-\gamma-\alpha\varrho^2}{\delta+\beta\varrho^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta},$$

deren letzter der Classe R angehört. Offenbar entspricht den vier Zahlen

$-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ dasselbe Feld (ω); sonst aber entsprechen, wie die genaue Untersuchung zeigt, zwei verschiedenen Systemen von vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ immer zwei verschiedene Felder (ω), welche ganz ausserhalb einander liegen und höchstens eine Grenzlinie oder auch nur einen Eckpunkt gemeinsam haben können. Die ganze Halbebene S einschliesslich R bebesteht aus unendlich vielen solchen, den verschiedenen Systemen oder Substitutionen $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, $\pm\delta$ entsprechenden Kreisbogendreiecken (ω), welche sich in unendlicher Anzahl und Verkleinerung an die Abscissenaxe andrängen.

Niemals enthält aber ein solches Feld (ω) einen *irrationalen* reellen Werth, und in diesem Sinne sage ich, dass bei unserer Untersuchung die Classe R der *rationalen* Zahlen die vollständige Begrenzung des Gebietes S bildet. Ist r eine bestimmte rationale Zahl, so giebt es unendlich viele Felder (ω), welche diesen Werth r gemeinschaftlich haben (vergl. §. 4, III.); das aus allen diesen Feldern bestehende Gebiet $G(r)$ ist durch unendlich viele solche Kreisbogen begrenzt, welche der Linie (3.) entsprechen. Ist nun x ein constanter reeller, aber irrationaler Werth, und nimmt y von $+\infty$ bis 0 ab, so durchläuft $\omega = x+yi$ unendlich viele solche Gebiete $G(r)$, und die Zahlen r, deren Nenner immer grösser werden, nähern sich dem Werthe x unendlich an. So lange ω einem und demselben Gebiete $G(r)$ angehört, beschreibt die aequivalente Zahl ω_0 im Hauptfelde Kreisbogen, welche immer nach einer bestimmten der beiden Linien (1.), (2.) hinführen, von hier zu dem symmetrischen Punkte springen und sich durch Verschiebung zu einem einzigen Kreise zusammensetzen lassen; endlich aber muss ein letzter solcher Kreisbogen in die Linie (3.) führen; dann tritt ω in das folgende Gebiet $G(r')$, und nun beginnt ω_0 von dem symmetrischen Punkte der Linie (3.) aus, eine neue Kreisbogenbewegung in (ω_0), welche dem Durchgange der Variablen ω durch eine endliche Anzahl von Feldern des Gebietes $G(r')$ entspricht (vergl. den Schluss von §. 6.). Die Annäherung der Zahlen $r, r' \ldots$ an den Werth x ist nicht ohne Interesse, und ich verspreche mir (vielleicht mit Unrecht) von der näheren Untersuchung derselben noch ein brauchbares Resultat, wenigstens für den Fall, dass x die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist.

§. 3. Die Valenz.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich zu dem Fundamentalsatze meiner Untersuchung über, welcher folgendermaassen lautet:

Es giebt eine Function v der Variablen ω im Gebiete S und auf dessen Begrenzung R, welche für alle aequivalenten Werthe ω Einen bestimmten Werth besitzt, und zwar so, dass umgekehrt Jedem Werthe der unbeschränkten complexen Variablen v Eine bestimmte Classe von aequivalenten Werthen ω entspricht.

Der Beweis ergiebt sich aus den Principien von *Riemann* (Art. 21 der Inaugural-Dissertation). Man bilde die eine der beiden symmetrischen Hälften des Hauptfeldes (ω_0) auf einer der beiden Hälften der v-Ebene ab, in welche dieselbe durch die Axe der *reellen* v zerfällt; hierbei bleiben drei reelle Constanten willkürlich, da zu einem inneren und zu einem Begrenzungspunkte des Originals die entsprechenden Bildpunkte willkürlich gewählt werden dürfen. Hierauf setze man die Abbildung durch die Symmetrieaxe des Feldes (ω_0) hindurch in die andere Hälfte in der Weise fort, dass je zwei zur Axe symmetrischen Punkten ω_0 zwei conjugirte complexe Werthe v entsprechen; hiermit ist das ganze Feld (ω_0) so auf der ganzen v-Ebene abgebildet, dass je zwei aequivalenten Werthen ω_0, d. h. je zwei symmetrischen Punkten der Begrenzung von (ω_0) ein und derselbe (reelle) Werth v entspricht; je zwei nicht aequivalenten Werthen ω_0 entsprechen zwei verschiedene Werthe v, und umgekehrt entspricht jedem Werthe v ein einziger Werth ω_0, oder es entsprechen ihm zwei aequivalente Werthe ω_0, welche der Begrenzung von (ω_0) angehören. Man kann daher die Abbildung von (ω_0) auf alle Felder (ω) der ganzen Halbebene S und deren Begrenzung R so ausdehnen, dass je zwei aequivalenten Werthen ω ein und derselbe Werth v entspricht, und es leuchtet ein, dass bei dem Uebergange von einem Felde (ω) durch die Begrenzung desselben zu einem benachbarten Felde die Function v sich stetig ändert.

Sind nun A, B, C, D beliebige reelle Constanten, so hat die Function

$$\frac{C+Dv}{A+Bv}$$

dieselben Eigenschaften wie v, und sie nimmt ebenfalls jeden reellen Werth einmal an, wenn ω_0 die ganze Begrenzung der einen symmetrischen Hälfte des Feldes (ω_0) durchläuft; die drei verfügbaren Constanten sollen nun so gewählt werden, dass

dem	Werthe	$\omega_0 = \varrho$	der	Werth	$v = 0$,
-	-	$\omega_0 = i$	-	-	$v = 1$,
-	-	$\omega_0 = \infty$	-	-	$v = \infty$

entspricht. Die hierdurch völlig bestimmte Function v will ich die *Valenz* von ω nennen und mit $\operatorname{val}(\omega)$ bezeichnen. Aequivalente Zahlen ω sind demnach Zahlen von gleicher Valenz.

§. 4. Windungspunkte.

Um von dieser Definition der Function v zu ihrer analytischen Bestimmung zu gelangen, betrachten wir zunächst die umgekehrte Function; ist ω ein Zweig derselben, so ist jeder andere von der Form

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und es fragt sich, ob zwei solche im Allgemeinen verschiedene Zweige in einem Windungspunkte v, für welchen $\omega = \omega_1 = \tau$ wird, zusammenhängen können. Hierzu ist erforderlich, dass τ eine Wurzel der Gleichung

$$\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\tau - \gamma = 0,$$

also

$$(2\beta\tau + \alpha - \delta)^2 = (\alpha + \delta)^2 - 4$$

ist, und da τ entweder rational ist oder eine positive Ordinate hat, so sind nur folgende drei Fälle möglich.

$$\text{(I.)} \quad \alpha + \delta = 0.$$

Da $\alpha^2 + 1 = (\alpha + i)(\alpha - i) = -\beta\gamma$ ist, und β positiv angenommen werden darf, so ergiebt sich aus der Theorie der ganzen complexen Zahlen von *Gauss* mit Leichtigkeit, dass man

$$-\alpha + i = (\alpha' - \beta' i)(\gamma' + \delta' i); \qquad \gamma = -(\gamma' + \delta' i)(\gamma' - \delta' i),$$
$$\beta = (\alpha' + \beta' i)(\alpha' - \beta' i); \quad \alpha + i = -(\alpha' + \beta' i)(\gamma' - \delta' i)$$

setzen kann, wo $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ vier ganze rationale Zahlen bedeuten, welche offenbar der Bedingung $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ genügen müssen; die ganzen complexen Zahlen $\alpha' + \beta' i$, $\gamma' + \delta' i$ sind relative Primzahlen, und man erhält

$$\tau = \frac{-\alpha + i}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha + i} = \frac{\gamma' + \delta' i}{\alpha' + \beta' i},$$

d. h. τ ist aequivalent mit i, und folglich ist $v = 1$. Nimmt man nun z. B. $\tau = i$, so ist

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0,$$

und die beiden in Rede stehenden Zweige sind

$$\omega_0 \text{ und } \frac{-1}{\omega_0}.$$

Diese hängen aber wirklich an der Stelle $v = 1$, $\omega = i$ zusammen; denn wenn v, von Werthen mit positiver Ordinate ausgehend, einen positiven Umlauf um $v = 1$ macht, also die Axe der reellen v zuerst zwischen 0 und 1, und nachher zwischen 1 und $+\infty$ kreuzt, so geht ω_0 aus derjenigen Hälfte des Hauptfeldes (ω_0), in welcher die Abscissen negativ sind, durch den Kreisbogen (3.) zwischen ϱ und i zunächst in die Hälfte des Feldes $\left(\frac{-1}{\omega_0}\right)$ über, in welcher die Abscissen negativ sind, und dann durch die Ordinatenaxe hindurch in die andere Hälfte desselben Feldes $\left(\frac{-1}{\omega_0}\right)$, in in welcher die Abscissen positiv sind. Hieraus ergiebt sich, dass $(1-v)$ unendlich klein wie $(\omega - i)^2$ wird, und folglich bleibt in diesem Windungspunkte das Product

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{d\omega}$$

endlich und von 0 verschieden. Dasselbe gilt für je zwei Zweige

$$\omega = \frac{\gamma' + \delta' \omega_0}{\alpha' + \beta' \omega_0} \quad \text{und} \quad \omega_1 = \frac{-\delta' + \gamma' \omega_0}{-\beta' + \alpha' \omega_0},$$

welche sich für $v = 1$ in irgend einem mit i aequivalenten Werthe

$$\tau = \frac{\gamma' + \delta' i}{\alpha' + \beta' i}$$

vereinigen, und zwischen welchen die Relation

$$\omega_1 = \frac{\gamma - \alpha\omega}{\alpha + \beta\omega} = \frac{-(\gamma'^2 + \delta'^2) + (\alpha'\gamma' + \beta'\delta')\omega}{-(\alpha'\gamma' + \beta'\delta') + (\alpha'^2 + \beta'^2)\omega}$$

besteht.

$$\text{(II.)} \quad \alpha + \delta = \pm 1.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{1 - \alpha + \delta}{2},$$

so ist, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt,

$$\varepsilon = 1 - \alpha = \delta \quad \text{oder} \quad \varepsilon = -\alpha = 1 + \delta,$$

folglich in beiden Fällen

$$(\varepsilon + \alpha - 1)(\varepsilon + \alpha) = 0,$$

also

$$\alpha\delta = \alpha(2\varepsilon + \alpha - 1) = \varepsilon - \varepsilon^2;$$

mithin ist

$$-\beta\gamma = \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = (\varepsilon + \varrho)(\varepsilon + \varrho^2),$$

und da β positiv angenommen werden darf, so ergiebt sich hieraus zufolge der Theorie der aus ϱ gebildeten ganzen complexen Zahlen, dass man

$$\varepsilon+\varrho=(\alpha'+\beta'\varrho^2)(\gamma'+\delta'\varrho); \qquad \gamma=-(\gamma'+\delta'\varrho)(\gamma'+\delta'\varrho^2),$$
$$\beta=(\alpha'+\beta'\varrho)(\alpha'+\beta'\varrho^2); \quad \varepsilon+\varrho^2= \quad (\alpha'+\beta'\varrho)(\gamma'+\delta'\varrho^2)$$

setzen kann, wo α', β', γ', δ' vier ganze rationale Zahlen bedeuten, welche offenbar der Bedingung $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1$ genügen müssen; die ganzen complexen Zahlen $\alpha'+\beta'\varrho$, $\gamma'+\delta'\varrho$ sind relative Primzahlen, und man erhält

$$\tau=\frac{\varepsilon+\varrho}{\beta}=\frac{-\gamma}{\varepsilon+\varrho^2}=\frac{\gamma'+\delta'\varrho}{\alpha'+\beta'\varrho},$$

d. h. τ ist aequivalent mit ϱ, und folglich ist $v=0$. Nimmt man nun z. B. $\tau=\varrho$, so ist $\varepsilon=0$, $\beta=1$, also entweder

$$\alpha=1, \quad \beta=1, \quad \gamma=-1, \ \delta=0,$$

oder

$$\alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma=-1, \quad \delta=-1,$$

und in der That geht, wenn v aus einem Werthe mit positiver Ordinate einen positiven Umlauf um $v=0$ macht, von den drei Zweigen

$$\omega_0, \quad \frac{-1-\omega_0}{\omega_0}, \quad \frac{-1}{1+\omega_0}$$

der erste in den zweiten, dieser in den dritten, und dieser wieder in den ersten über. (Macht v denselben Umlauf aus einem Werthe mit negativer Ordinate, so gehen die drei Zweige

$$\frac{-1}{\omega_0}, \quad -1+\omega_0, \quad \frac{-\omega_0}{-1+\omega_0},$$

welche ebenfalls den Eckpunkt ϱ gemeinschaftlich haben, cyklisch in einander über). Hieraus folgt, dass in diesem Windungspunkte das Product

$$v^{-\frac{2}{3}}\frac{dv}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Aehnlich verhält es sich für alle anderen mit ϱ aequivalenten Werthe τ.

(III.) $\quad (\alpha+\delta)^2 = 4.$

In diesem und nur in diesem Falle wird τ rational, also ein Repräsentant der Begrenzung R, und folglich wird $v=\infty$. Setzt man (was erlaubt ist) $\alpha+\delta=+2$, und

$$\tau=\frac{1-\alpha}{\beta}=\frac{-\gamma}{1-\alpha}=\frac{m}{n},$$

wo m, n relative Primzahlen, so ergiebt sich

$$\alpha = 1+gmn, \quad \beta = -gn^2, \quad \gamma = +gm^2, \quad \delta = 1-gmn,$$

wo g eine *willkürliche* ganze Zahl bedeutet. Nimmt man z. B. $m = 1$, $n = 0$, also $\tau = \infty$, so erkennt man leicht, dass jeder der unendlich vielen Zweige $(g+\omega_0)$ durch einen positiven Umlauf von v um $v = \infty$ in den folgenden Zweig $(g+1+\omega_0)$ übergeht. Für unendlich grosse Werthe von ω ist daher die unendlich kleine Grösse

$$q^2 = 1^{\omega}$$

eine einändrige Function von v, und da umgekehrt v überall eine einwerthige Function von 1^{ω} ist, so bleibt für $\omega = \infty$ das Product

$$v 1^{\omega}$$

endlich und von Null verschieden, und zugleich wird

$$v^{-1}\frac{dv}{d\omega} = \frac{d\log v}{d\omega} = -2\pi i.$$

Hieraus lässt sich leicht das Verhalten von v für alle anderen rationalen Werthe $\omega = \frac{m}{n}$ ableiten.

§. 5. Differentialgleichungen.

Bedeuten u, v zwei beliebige von einander abhängige Variable, so wollen wir zur Abkürzung den Differentialausdruck dritter Ordnung

$$(1.) \quad \frac{-4}{\sqrt{\frac{dv}{du}}}\frac{d}{dv}\frac{d}{dv}\sqrt{\frac{dv}{du}} = [v, u]$$

setzen; man findet leicht, dass derselbe die beiden Eigenschaften

$$(2.) \quad [u, v] = -[v, u]\left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

$$(3.) \quad [v, u]\,dv^2 + [w, v]\,dw^2 + [u, w]\,du^2 = 0$$

besitzt, wo w ebenfalls eine beliebige Function von u, also auch von v bedeutet. Sind ferner u, w *collineare* Variable, womit ausgedrückt sein soll, dass

$$(4.) \quad w = \frac{C+Du}{A+Bu}$$

ist, wo A, B, C, D Constanten bedeuten, so ist

$$(5.) \quad [u, w] = [w, u] = 0,$$

und folglich, was auch v sein mag,

$$(6.)\quad [v, u] = [v, w];$$

und umgekehrt, wenn $[u, w] = 0$ ist, so sind u, w collinear, d. h. die Gleichung (4.) ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (5.).

Diese allgemeinen Sätze wenden wir auf folgendes Beispiel an. Es sei wieder $v = \mathrm{val}(\omega)$, so ist offenbar

$$[v, \omega] = f(\omega)$$

eine einwerthige Function von ω, da sie auf rationale Weise aus den Derivirten erster, zweiter und dritter Ordnnng von v in Bezug auf ω gebildet ist; wir wollen nun beweisen, dass sie auch eine einwerthige Function von v ist. In der That, setzt man $v_1 = \mathrm{val}(\omega_1)$, wo ω_1 eine neue Variable bedeutet, so ist $f(\omega_1) = [v_1, \omega_1]$; und wenn ω_1 mit ω durch die Gleichung

$$\omega_1 = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$$

verbunden wird, wo α, β, γ, δ ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, so ist $v_1 = v$, also $f(\omega_1) = [v, \omega_1]$; da ausserdem ω, ω_1 collinear sind, so folgt aus (6.), dass $[v, \omega] = [v, \omega_1]$, also $f(\omega) = f(\omega_1)$ ist; mithin entspricht jedem Werthe v nur ein einziger Werth $f(\omega)$. Wir können daher

$$(7.)\quad [v, \omega] = F(v)$$

setzen, wo $F(v)$ eine einwerthige Function von v bedeutet. Aus ihrer Bildung geht hervor, dass sie für alle Werthe v, mit Ausnahme von 1, 0, ∞ endlich bleibt, und da für diese Werthe von v, denen man die Werthe i, ϱ, ∞ von ω entsprechen lassen darf, respective das Product

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{d\omega}, \quad v^{-\frac{2}{3}} \frac{dv}{d\omega}, \quad v^{-1} \frac{dv}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden bleibt, so ergiebt sich, dass entsprechend

$$(1-v)^2 F(v) = \tfrac{3}{4}, \quad v^2 F(v) = \tfrac{8}{9}, \quad v^2 F(v) = 1$$

wird; da folglich die einwerthige Function $v^2(1-v)^2 F(v)$ für alle endlichen Werthe von v endlich bleibt und für $v = \infty$ unendlich gross von zweiter Ordnung wird, so ist sie eine ganze Function zweiten Grades, deren Coefficienten aus den vorstehenden drei Gleichungen sich unmittelbar ergeben; auf diese Weise findet man

$$(8.)\quad \begin{cases} F(v) = \dfrac{36v^2 - 41v + 32}{36v^2(1-v)^2} \\ \quad\;\; = \dfrac{8}{9v^2} + \dfrac{23}{36v} + \dfrac{3}{4(1-v)^2} + \dfrac{23}{36(1-v)}. \end{cases}$$

Die Function $v = \text{val}(\omega)$ ist daher eine Lösung v' der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(9.)\quad [v', \omega] = F(v');$$

um ihr allgemeines Integral v' zu finden, setze man $v' = \text{val}(\omega')$, wo ω' eine neue Variable bedeutet; dann ist $[v', \omega'] = F(v')$, also $[v', \omega'] = [v', \omega]$, woraus mit Rücksicht auf (2.) und (3.) folgt, dass $[\omega, \omega'] = 0$, also

$$(10.)\quad \omega' = \frac{C + D\omega}{A + B\omega}, \quad v' = \text{val}\left(\frac{C + D\omega}{A + B\omega}\right)$$

ist, wo A, B, C, D willkürliche Constanten bedeuten. Zugleich ergiebt sich aus (3.), dass das System der beiden Gleichungen

$$(11.)\quad v = \text{val}(\omega), \quad v' = \text{val}\left(\frac{C + D\omega}{A + B\omega}\right)$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(12.)\quad [v, v']\, dv^2 = F(v)\, dv^2 - F(v')\, dv'^2$$

bildet (Vergl. Fund. nova §§. 32, 33).

§. 6. Die elliptischen Modul-Functionen.

Aus der Bildung des Ausdrucks $[v, \omega]$ geht hervor, dass $\sqrt{\frac{dv}{d\omega}}$ einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Bezug auf v genügt; allein es ist offenbar zweckmässiger, die Grösse

$$(1.)\quad w = \text{const.}\, v^{-\frac{1}{3}}(1-v)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

einzuführen, welche für alle Werthe von ω innerhalb S endlich und von Null verschieden bleibt, während sie in der Begrenzung R stets unendlich klein wird; mithin ist $\log w$ und jede Potenz von w, sobald ihr Werth an einer Stelle des einfach zusammenhängenden Gebietes S gegeben ist, eine völlig bestimmte, durchaus einwerthige Function von ω. Aus der obigen Differentialgleichung dritter Ordnung (7.) in §. 5. folgt nun, dass w der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(2.)\quad v(1-v)\frac{d^2w}{dv^2} + \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{7}{6}v\right)\frac{dw}{dv} - \tfrac{1}{144}w = 0$$

genügt, deren allgemeines Integral (const. + const. ω) w in der Form

$$\text{const.}\, F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}, v) + \text{const.}\, F(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{2}, 1-v)$$

enthalten ist, wo F die Reihe von *Gauss* bedeutet. Dasselbe hätte man auch durch directe Untersuchung der Grösse w als einer *Riemann*schen P-Function erhalten, und noch einfacher würde man, wie mein Freund *Heinrich Weber* in Königsberg mir vor einem Jahre mitgetheilt hat, durch die Betrachtungen zum Ziele gelangen können, welche den Gegenstand der Abhandlung XXV in *Riemanns* Werken bilden. Endlich bemerke ich, dass das in §. 3. behandelte Abbildungsproblem sich auch durch die Untersuchungen von *Weierstrass* und *Schwarz* erledigen lässt.

Von besonderem Interesse ist nun die Quadratwurzel der Grösse w, und ich will dieselbe durch

$$(3.)\qquad \eta(\omega) = \text{const.}\, v^{-\frac{1}{6}}(1-v)^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^{\frac{1}{4}}$$

bezeichnen; sie ist, wie schon bemerkt, eine einwerthige Function von ω, welche für alle Werthe von ω innerhalb S endlich und von Null verschieden bleibt; für $\omega = \infty$ wird sie unendlich klein wie $v^{-\frac{1}{24}}$, also wie $1^{\frac{\omega}{24}}$; ich wähle die Constante so, dass für $\omega = \infty$ das Product

$$(4.)\qquad 1^{-\frac{\omega}{24}}\eta(\omega) = 1$$

wird, und hierdurch ist $\eta(\omega)$ für das ganze Gebiet S vollständig bestimmt. Bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wieder vier ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, so folgt aus

$$\text{val}\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = \text{val}(\omega)$$

die Eigenschaft

$$(5.)\qquad \eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = c(\alpha+\beta\omega)^{\frac{1}{2}}\eta(\omega),$$

wo $c^{24} = 1$ ist; speciell ergiebt sich leicht

$$(6.)\qquad \eta(1+\omega) = 1^{\frac{1}{24}}\eta(\omega); \quad \eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-\frac{1}{8}}\omega^{\frac{1}{2}}\eta(\omega),$$

wo $\omega^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{8}}$ wird, wenn $\omega = 1^{\frac{1}{4}} = i$ ist. Die Function ist durch die genannten Eigenschaften vollständig bestimmt; denn wenn $f(\omega)$ ebenso beschaffen ist, so ist der Quotient $f(\omega):\eta(\omega)$ zufolge (6.) eine einwerthige Function von $v = \text{val}(\omega)$, welche für alle endlichen Werthe von v endlich

bleibt und zufolge (4.) für $v = \infty$ den Werth Eins annimmt, und folglich constant $= 1$ ist.

Um nun den Zusammenhang zwischen dieser Function $\eta(\omega)$ und dem Modul der elliptischen Integrale oder dessen Quadrat k herzustellen, betrachte ich die der Transformation zweiter Ordnung entsprechenden Functionen

$$(7.) \qquad \eta_1(\omega) = \eta(2\omega); \quad \eta_2(\omega) = \eta\left(\frac{\omega}{2}\right); \quad \eta_3(\omega) = \eta\left(\frac{1+\omega}{2}\right),$$

welche folgende Eigenschaften besitzen. Aus (6.) folgt

$$\eta_1(1+\omega) = 1^{\frac{1}{12}}\eta_1(\omega); \quad \eta_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\eta_2(\omega),$$

$$\eta_2(1+\omega) = \eta_3(\omega) \quad ; \quad \eta_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-\frac{1}{8}}(2\omega)^{\frac{1}{2}}\eta_1(\omega),$$

$$\eta_3(1+\omega) = 1^{\frac{1}{24}}\eta_2(\omega); \quad \eta_3\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 1^{-\frac{1}{8}}\omega^{\frac{1}{2}}\eta_3(\omega);$$

und für $\omega = \infty$ folgt aus (4.)

$$1^{-\frac{\omega}{12}}\eta_1(\omega) = 1; \quad 1^{-\frac{\omega}{48}}\eta_2(\omega) = 1; \quad 1^{-\frac{\omega}{48}}\eta_3(\omega) = 1^{\frac{1}{48}}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Function

$$f(\omega) = \frac{\eta_1(\omega)\eta_2(\omega)\eta_3(\omega)}{\eta(\omega)^3}$$

die Eigenschaften

$$f(1+\omega) = f(\omega), \quad f\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f(\omega)$$

besitzt und folglich eine einwerthige Function von $v = \operatorname{val}(\omega)$ ist, weil alle Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ sich aus den beiden Substitutionen $\begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0, 1\\ -1, 0\end{pmatrix}$ zusammensetzen lassen; sie bleibt vermöge ihrer Definition endlich für alle endlichen Werthe v und wird $= 1^{\frac{1}{48}}$ für $\omega = \infty$, $v = \infty$, folglich ist sie eine Constante. Es ist daher

$$(8.) \qquad \eta_1(\omega)\eta_2(\omega)\eta_3(\omega) = 1^{\frac{1}{48}}\eta(\omega)^3,$$

und ein ähnlicher Satz gilt für Transformationen von beliebiger Ordnung. Ebenso ergiebt sich, dass die Function

$$f_1(\omega) = \frac{2^4\eta_1(\omega)^8 + \eta_2(\omega)^8 + 1^{\frac{1}{3}}\eta_3(\omega)^8}{\eta(\omega)^8}$$

die Eigenschaften

$$f_1(1+\omega) = 1^{\frac{1}{3}}f_1(\omega), \quad f_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_1(\omega)$$

besitzt, woraus folgt, dass $f_1(\omega)^3$ eine einwerthige Function von $v = \mathrm{val}(\omega)$ ist, welche für jeden endlichen Werth von v endlich ist; für $\omega = \infty$, $v = \infty$ wird ferner $f_1(\omega)\, 1^{\frac{\omega}{6}} = 0$, also auch $f_1(\omega)^3 v^{-\frac{1}{3}} = 0$; also kann $f_1(\omega)^3$ nicht einmal von der Ordnung $v^{\frac{1}{3}}$ unendlich gross werden, und folglich ist $f_1(\omega)^3$, also auch $f_1(\omega)$ eine Constante, und zwar $= 0$, wie sich aus $f_1(1+\omega) = 1^{\frac{1}{3}} f_1(\omega)$ ergiebt. Es ist daher

$$(9.) \qquad 2^4 \eta_1(\omega)^8 + \eta_2(\omega)^8 + 1^{\frac{1}{3}} \eta_3(\omega)^8 = 0.$$

Führt man nun die folgenden Bezeichnungen ein (welche mit denen von *Hermite* übereinstimmen)

$$(10.) \qquad \begin{cases} \varphi(\omega) = 1^{\frac{1}{48}} \sqrt{2} \,.\, \dfrac{\eta_1(\omega)}{\eta_3(\omega)} = \sqrt[4]{\varkappa} = \sqrt[8]{k}, \\ \psi(\omega) = 1^{\frac{1}{48}} \dfrac{\eta_2(\omega)}{\eta_3(\omega)} = \sqrt[4]{\varkappa'} = \varphi\left(\dfrac{-1}{\omega}\right), \\ \chi(\omega) = 1^{\frac{1}{48}} \sqrt[6]{2} \,.\, \dfrac{\eta(\omega)}{\eta_3(\omega)}, \end{cases}$$

so folgt aus (9.)

$$(11.) \qquad \varphi(\omega)^8 + \psi(\omega)^8 = 1, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

und aus (8.)

$$(12.) \qquad \varphi(\omega)\psi(\omega) = \chi(\omega)^3;$$

ausserdem kann man die Grössen K, K' durch die Gleichungen

$$(13.) \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1^{-\frac{1}{24}} \frac{\eta_3(\omega)^2}{\eta(\omega)}, \quad K'i = K\omega$$

definiren.

Für die Function $k = \varkappa^2 = \varphi(\omega)^8$ ergeben sich nun aus dem Obigen die Eigenschaften

$$(14.) \qquad \varphi(1+\omega)^8 = -2^4 \frac{\eta_1(\omega)^8}{\eta_2(\omega)^8} = \frac{k}{k-1},$$

$$(15.) \qquad \varphi\left(\frac{-1}{\omega}\right)^8 = 1^{\frac{1}{3}} \frac{\eta_2(\omega)^8}{\eta_3(\omega)^8} = \varkappa'^2 = 1-k,$$

und ausserdem ist

$$(16.) \qquad k\, 1^{-\frac{\omega}{2}} = 2^4 \quad \text{für} \quad \omega = \infty.$$

Hieraus folgt, dass die Function

$$f_2(\omega) = \frac{(k+\varrho)^3 (k+\varrho^2)^3}{k^2 (1-k)^2}$$

die Eigenschaften

$$f_2(1+\omega) = f_2(\omega), \quad f_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_2(\omega)$$

besitzt, mithin eine einwerthige Function von $v = \mathrm{val}(\omega)$ ist; sie kann nur dann unendlich werden, wenn $k = 0,\ 1,\ \infty$ wird; da aber k und $(1-k)$ Quotienten von η-Functionen sind, so kann dies nur dann geschehen, wenn $v = \infty$ wird, also z. B. für $\omega = \infty$; in diesem Fall wird aber k zufolge (16.) unendlich klein wie $1^{\frac{\omega}{2}}$, also wie $v^{-\frac{1}{2}}$, und folglich $f_2(\omega)$ unendlich gross wie v; mithin ist $f_2(\omega)$ eine ganze Function ersten Grades von v, also

$$\frac{(k+\varrho)^3(k+\varrho^2)^3}{k^2(1-k)^2} = av+b.$$

Um die Constante b zu bestimmen, setze man $\omega = \varrho$, also $v = 0$; da nun

$$\eta_3(\varrho) = \eta\left(\frac{1+\varrho}{2}\right) = \eta\left(\frac{-1}{2\varrho}\right),$$

und folglich

$$\eta_3(\varrho)^8 = \eta\left(\frac{-1}{2\varrho}\right)^8 = (2\varrho)^4\eta(2\varrho)^8 = (2\varrho)^4\eta_1(\varrho)^8$$

ist, so ergiebt sich für k der Werth

$$(17.) \qquad \varphi(\varrho)^8 = 1^{\frac{1}{3}}2^4\frac{\eta_1(\varrho)^8}{\eta_3(\varrho)^8} = -\varrho,$$

und folglich ist $b = 0$. Um a zu bestimmen, setze man $\omega = i$, also $v = 1$; dann ergiebt sich für k der Werth

$$(18.) \qquad \varphi(i)^8 = \varphi\left(\frac{-1}{i}\right)^8 = 1-\varphi(i)^8 = \tfrac{1}{2},$$

woraus $a = \frac{27}{4}$ folgt. Auf diese Weise erhalten wir das Resultat

$$(19.) \qquad v = \mathrm{val}(\omega) = \tfrac{4}{27}\frac{(k+\varrho)^3(k+\varrho^2)^3}{k^2(1-k)^2}.$$

In dieser Form erscheint die Function v an mehreren Stellen der berühmten Abhandlung von *Hermite* über die Theorie der Modulargleichungen; ich bemerke zugleich, dass auch *Gauss* (Werke III. S. 386) die Absicht gehabt hat, eine solche Function einzuführen.

Man kann, in ähnlicher Weise wie dies oben für $\eta(\omega)$ geschehen ist, beweisen, dass die Function $k = \varphi(\omega)^8$ durch die angegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt ist; die Principien, auf welche sich der Nachweis der Existenz der Function v gestützt hat, führen auch ebenso leicht

zur *unmittelbaren* Bestimmung der Function k; dieselbe erfordert, wie aus der Combination von (14.) und (15.) hervorgeht, zu ihrer vollen Ausbreitung im Gebiete S sechs ganze oder zwölf halbe Felder (ω), welche letzteren so gewählt werden können, dass sie symmetrisch zu beiden Seiten der rein imaginären ω liegen. Man erhält auf diese Weise die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(20.)\qquad [k, \omega] = \frac{(k+\varrho)(k+\varrho^2)}{k^2(1-k)^2},$$

und ebenso wie wir oben zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für $w = \text{const.}\,\eta(\omega)^2$ gelangt sind, ergiebt sich hier, wenn man

$$(21.)\qquad \frac{dk}{d\omega} = \frac{-4}{\pi i}k(1-k)K^2$$

setzt, die bekannte lineare Differentialgleichung

$$(22.)\qquad \frac{d}{dk}\left(k(1-k)\frac{dK}{dk}\right) = \tfrac{1}{4}K,$$

welche den Ausgangspunkt der Abhandlung von *Fuchs* bildet. Natürlich würde man dieselben Resultate auch aus dem Zusammenhang zwischen k und v finden, welcher in (19.) ausgedrückt ist.

Da k durch die obigen Eigenschaften als Function von ω vollständig bestimmt ist, und da die in der Theorie der elliptischen oder ϑ-Functionen auftretende Function

$$\frac{\vartheta_2(0, \omega)^4}{\vartheta_3(0, \omega)^4}$$

wirklich dieselben Eigenschaften besitzt, so ergiebt sich aus dieser Identität beider Functionen leicht, dass

$$(23.)\qquad \begin{cases} \vartheta(0, \omega) = \dfrac{\eta_2(\omega)^2}{\eta(\omega)}; \quad \vartheta_1'(0, \omega) = 2\pi\eta(\omega)^3, \\ \vartheta_2(0, \omega) = 2\dfrac{\eta_1(\omega)^2}{\eta(\omega)}; \quad \vartheta_3(0, \omega) = 1^{-\frac{1}{24}}\dfrac{\eta_3(\omega)^2}{\eta(\omega)}, \end{cases}$$

und folglich

$$(24.)\qquad \eta(\omega) = 1^{\frac{\omega}{24}}\Pi(1-1^{\omega\nu}) = q^{\frac{1}{12}}\Pi(1-q^{2\nu})$$

ist, wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, und

$$(25.)\qquad q = 1^{\frac{\omega}{2}}$$

gesetzt ist. Allein es ist mir bisher nicht geglückt, diese *Darstellung* von

$\eta(\omega)$ als explicite Function von ω lediglich aus ihrer obigen Definition, also ohne die Hülfe der Theorie der ϑ-Functionen abzuleiten.

Die eingehende Beschäftigung mit dieser Function $\eta(\omega)$, zu welcher mich zuerst die Untersuchung über die Anzahl der Idealclassen in kubischen Körpern veranlasst hatte, ist mir später von grossem Nutzen bei der Bearbeitung des zweiten Fragmentes XXVII aus dem Nachlasse von ***Riemann*** gewesen. Die Zahlen (m, n), auf welche ich durch das Studium desselben geführt bin, besitzen in der That sehr interessante Eigenschaften; ist z. B. n eine positive ungerade Zahl, und m relative Primzahl zu n, so ist

$$\left(\frac{m}{n}\right) \equiv \frac{n+1}{2} - (m, n) \pmod{4},$$

wo $\left(\frac{m}{n}\right)$ das Zeichen von ***Legendre*** und ***Jacobi*** aus der Theorie der quadratischen Reste bedeutet; ist m ebenfalls positiv und ungerade, so ergiebt sich hieraus unter Zuziehung des Satzes

$$2m(m, n) + 2n(n, m) = 1 + m^2 + n^2 - 3mn,$$

sofort der verallgemeinerte Reciprocitätssatz in der Form

$$\left(\frac{m}{n}\right) + \left(\frac{n}{m}\right) \equiv 2\left(1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}\right) \pmod{4}.$$

Ich erlaube mir hier auf eine Stelle der Abhandlung von ***Fuchs*** aufmerksam zu machen, in welche, wie mir scheint, sich ein Irrthum eingeschlichen hat. Sind m, n relative Primzahlen, und nähert sich $\omega = x + yi$ dem rationalen Werthe $\frac{m}{n}$ so an, dass x constant $= \frac{m}{n}$ bleibt, und y positiv unendlich klein wird, so nähert sich k, wie aus dem Fragmente von ***Riemann*** oder auch aus der obigen Theorie folgt, dem Werthe

$$\begin{array}{llll} k = \infty, & \text{wenn} & m \equiv 1, \; n \equiv 1 & \pmod{2}, \\ k = 1, & \text{-} & m \equiv 0, \; n \equiv 1 & \text{-} \\ k = 0, & \text{-} & m \equiv 1, \; n \equiv 0 & \text{-} \end{array}$$

ist; wenn dagegen $\omega = x + yi$ sich auf dieselbe Weise einem ***irrationalen*** reellen Werth x nähert, so ergiebt sich aus der obigen Theorie (vergl. den Schluss von §. 2.), dass k sich ***keinem*** bestimmten Werthe nähert, sondern unaufhörliche Schwankungen erleidet. Dies steht im Widerspruch mit dem Satze II. auf Seite 27 der genannten Abhandlung, in welchem behauptet wird, dass die Grösse u ($= k^{-1}$ nach meiner Bezeichnung) sich immer einem der beiden Werthe Null oder Eins annähern müsse, und mir scheint, als

sei der Beweis dieser Behauptung gerechten Bedenken unterworfen, namentlich in dem Theile, welcher auf die Worte „ou n'y parvînt pas“ (S. 26) folgt. Doch ist diese Abweichung von keiner wesentlichen Bedeutung für den Hauptgegenstand der sehr interessanten Abhandlung.

§. 7. Transformation.

Ich will nun noch zum Schluss die Theorie der algebraischen Gleichungen zwischen Valenzen begründen, welche den Modulargleichungen in der Theorie der Transformation der elliptischen oder ϑ-Functionen entsprechen. Es sei wieder $v = \text{val}(\omega)$, und

$$v_n = \text{val}\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right),$$

wo A, B, C, D vier beliebige *ganze* Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler und von positiver Determinante

$$AD-BC=n$$

bedeuten. Die Anzahl aller möglichen solchen Functionen v_n, welche einer gegebenen positiven ganzen Zahl n entsprechen, ist endlich und leicht zu bestimmen. Es sei nämlich, wenn A, B, C, D gegeben sind, ∂ der grösste positive gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen

$$B = \partial\beta, \quad D = \partial\delta,$$

so ist

$$n = a\partial, \quad \text{wo} \quad a = A\delta - C\beta;$$

nun kann man, da β, δ relative Primzahlen sind, die beiden ganzen Zahlen α, γ stets und nur auf eine einzige Art so bestimmen, dass $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ wird, und dass zugleich die Zahl

$$c = C\alpha - A\gamma$$

der Bedingung

$$0 \leqq c < a$$

genügt; dann ist

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, 0 \\ c, \partial \end{pmatrix},$$

mithin

$$v_n = \text{val}\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right) = \text{val}\left(\frac{c+\partial\omega}{a}\right),$$

und da A, B, C, D keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so gilt dasselbe auch von den drei Zahlen a, c, ∂. Um daher für eine gegebene

Zahl n alle möglichen Functionen v_n zu erhalten, braucht man nur a alle positiven Divisoren von n durchlaufen zu lassen; für jeden solchen Divisor a bestimmt sich ∂ durch die Gleichung $a\partial = n$; ist nun e der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und ∂ so darf, wenn $\varphi(e)$ die Anzahl derjenigen Zahlen 0, 1, 2, ... $(e-1)$ bedeutet, welche relative Primzahlen zu e sind, die Zahl c alle diejenigen $\frac{a}{e}\varphi(e)$ Zahlen durchlaufen, welche relative Primzahlen zu e sind und zugleich der Bedingung $0 \leqq c < a$ genügen. Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass je zwei verschiedenen Systemen von drei solchen Zahlen a, c, ∂ auch zwei nichtidentische Functionen

$$v_n = \operatorname{val}\left(\frac{c+\partial\omega}{a}\right)$$

entsprechen, und folglich ist die Anzahl aller wirklich verschiedenen Functionen v_n gleich

$$\Sigma \frac{a}{e}\varphi(e) = \psi(n),$$

wo a alle Divisoren von n durchläuft, und e jedesmal die oben angegebene Bedeutung hat. Aus dieser Form folgt sofort, wenn n, n' relative Primzahlen sind, der Satz

$$\psi(nn') = \psi(n)\psi(n');$$

der Fall einer Primzahlpotenz ist leicht zu erledigen, und hieraus ergiebt sich allgemein

$$\psi(n) = n\Pi\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

wo p alle verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen durchläuft.

Setzt man zur Abkürzung $\psi(n) = \nu$, und bezeichnet mit

$$f_1(\omega),\quad f_2(\omega),\quad \ldots\quad f_\nu(\omega)$$

die sämmtlichen verschiedenen in der Form

$$\operatorname{val}\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right)$$

enthaltenen Functionen v_n, so sind, wenn α, β, γ, δ vier bestimmte ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ genügen, auch die ν Functionen

$$f_1\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right),\ f_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right),\ \ldots\ f_\nu\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$$

von einander verschieden; da ferner jedes System von vier ganzen Zahlen A, B, C, D ohne gemeinschaftlichen Theiler, welche die Bedingung $AD - BC = n$ befriedigen, durch die Zusammensetzung

$$\binom{A, B}{C, D}\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta} = \binom{A', B'}{C', D'},$$

wieder ein System von vier ganzen Zahlen A', B', C', D' liefert, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben und der Bedingung $A'D' - B'C' = n$ genügen, so ist jede dieser Functionen identisch mit einer der ν Functionen v_n, und folglich ist ihr Complex identisch mit dem der Functionen v_n. Bedeutet daher σ eine willkürliche, von ω unabhängige Grösse, so ist das über alle ν Functionen v_n ausgedehnte Product

$$\Pi(\sigma - v_n)$$

eine einwerthige Function von ω, welche ungeändert bleibt, wenn ω durch eine beliebige aequivalente Grösse

$$\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$$

ersetzt wird, und folglich kann man

$$\Pi(\sigma - v_n) = F_n(\sigma, v)$$

setzen, wo $F_n(\sigma, v)$ eine ganze Function ν^{ten} Grades von σ bedeutet, deren Coefficienten einwerthige Functionen von $v = \text{val}(\omega)$ sind. Ist v endlich, so gehört ω dem Innern des Gebietes S an, und folglich ist jeder der ν Werthe v_n, also auch $F_n(\sigma, v)$ endlich. Wird aber $v = \infty$, so darf man annehmen, dass auch $\omega = \infty$ wird; da nun in diesem Falle

$$1^{\omega}\text{val}(\omega) = m,$$

also

$$1^{\frac{\partial}{a}\omega}\text{val}\left(\frac{c + \partial\omega}{a}\right) = m\,1^{-\frac{c}{a}}$$

wird, wo m endlich und von Null verschieden ist (nämlich $= 2^{-6}3^{-3}$, wie sich aus (16.) und (19.) in §. 6. ergiebt), so folgt, dass $F_n(\sigma, v)$ gleichzeitig mit v unendlich gross wird, und zwar von der Ordnung

$$\Sigma \frac{\partial}{a} \cdot \frac{a}{e}\,\varphi(e) = \Sigma \frac{\partial}{e}\,\varphi(e) = \Sigma \frac{a}{e}\,\varphi(e) = \nu;$$

mithin ist

$$F_n(\sigma, v) = \sigma^{\nu} + V_1\sigma^{\nu-1} + V_2\sigma^{\nu-2} + \cdots + V_{\nu}$$

auch eine ganze Function ν^{ten} Grades von v, und es ist z. B.

$$-V_1 = \Sigma v_n = \frac{1}{m^{n-1}} v^n + \cdots$$

eine ganze Function n^{ten} Grades von v. Die ν Functionen v_n sind daher algebraische Functionen von v, nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$F_n(v_n, v) = 0.$$

Diese Valenzgleichung ist irreductibel. Genügt nämlich die Function $v_n' = \text{val}(n\omega)$ einer Gleichung von der Form

$$G(v_n', v) = 0,$$

wo $G(\sigma, v)$ eine ganze rationale Function der beiden Grössen σ, v bedeutet, so ist identisch

$$G(\text{val}(n\omega),\ \text{val}(\omega)) = 0,$$

folglich auch, wenn die vier ganzen Zahlen α, β, γ, δ der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen,

$$G\left(\text{val}\left(\frac{n\gamma + n\delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right),\ \text{val}(\omega)\right) = 0;$$

lässt sich nun zeigen, wie gleich geschehen soll, dass die Function

$$\text{val}\left(\frac{n\gamma + n\delta\omega}{\alpha + \beta\omega}\right)$$

durch geeignete Wahl der vier Zahlen α, β, γ, δ zur Uebereinstimmung mit jeder der ν Functionen

$$v_n = \text{val}\left(\frac{c + \partial\omega}{a}\right)$$

gebracht werden kann, so genügt jede Function v_n der Gleichung $G(v_n, v) = 0$, mithin ist $G(\sigma, v)$ theilbar durch $F_n(\sigma, v)$, woraus die Irreductibilität dieser letzteren Function folgt. Es ist also nur noch zu beweisen, dass, wenn drei Zahlen a, c, ∂ ohne gemeinschaftlichen Theiler gegeben sind, welche der Bedingung $a\partial = n$ genügen, man immer acht ganze Zahlen α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' so wählen kann, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ und

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha', \beta' \\ \gamma', \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, 0 \\ c, \partial \end{pmatrix}$$

wird. Die allgemeinste Art, solche Zahlen zu finden, ist die folgende (vergl. die zu Anfang dieses Paragraphen ausgeführte Reduction). Man wähle für δ eine beliebige Zahl, welche relative Primzahl zu ∂ ist, und setze

$$\delta' = a\delta,$$

so kann man γ so wählen, dass die Zahl

$$\gamma' = \partial\gamma - c\delta$$

relative Primzahl zu δ' wird; denn wie man auch γ wählen mag, so ist γ' jedenfalls untheilbar durch diejenigen Primzahlen, welche gleichzeitig in a und in ∂, also in e aufgehen, weil a, c, ∂ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, und weil δ relative Primzahl zu ∂ ist; bezeichnet man ferner mit p das Product aller übrigen in a aufgehenden Primzahlen (oder die Einheit, falls keine solche vorhanden sind), so ist ∂ relative Primzahl zu p, also auch zu $p\delta$, und folglich durchläuft γ' gleichzeitig mit γ ein vollständiges Restsystem (mod. $p\delta$); mithin giebt es unendlich viele Werthe von γ, für welche γ' relative Primzahl zu $p\delta$ und folglich auch zu $\delta' = a\delta$ wird. Nachdem δ, γ so gewählt sind, dass δ', γ' relative Primzahlen werden, wähle man eine beliebige Lösung α', β' der Gleichung

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

und setze

$$\alpha = a\alpha' + c\beta', \quad \beta = \partial\beta',$$

so wird

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (a\alpha' + c\beta')\delta - \partial\beta'\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

und die gefundenen acht Zahlen erfüllen die obigen Forderungen, weil

$$n\gamma = a\gamma' + c\delta', \quad n\delta = \partial\delta'$$

ist.

Die Function $F_n(\sigma, v)$ ist symmetrisch in Bezug auf σ und v, wenn $n > 1$ ist. Denn aus der Identität

$$F_n(\mathrm{val}(n\omega), \mathrm{val}(\omega)) = 0$$

folgt, wenn man ω durch $\frac{\omega}{n}$ ersetzt, die Gleichung

$$F_n\left(v, \mathrm{val}\left(\frac{\omega}{n}\right)\right) = 0,$$

und da $\mathrm{val}\left(\frac{\omega}{n}\right)$ eine der ν Functionen v_n ist, so ergiebt sich aus der eben bewiesenen Irreductibilität, dass $F_n(v, \sigma)$ durch $F_n(\sigma, v)$ theilbar und folglich $= \pm F_n(\sigma, v)$ sein muss; da aber im Falle des unteren Zeichens die irreductible Function $F_n(\sigma, v)$ den Factor $(\sigma - v)$ enthalten würde, so muss, wenn $n > 1$ ist, das obere Zeichen gelten.

Da die sämmtlichen Functionen v_n nur specielle Fälle der in der Gleichung (11.) des §. 5. mit v' bezeichneten Function bilden, so besitzt

die dortige Differentialgleichung (12.) unendlich viele particuläre Lösungen $v' = v_n$, welche algebraische Functionen von v sind. Es lässt sich auch zeigen, dass sie keine anderen algebraischen Lösungen besitzen kann, und hieraus kann man, wie ich glaube, den Satz ableiten, dass alle Coefficienten der Function $F_n(\sigma, v)$ *rationale* Zahlen sind. Ich bemerke schliesslich, dass man durch die Untersuchung der ganzen Function $F_n(v, v)$ oder auch der Discriminante der Function $F_n(\sigma, v)$ zur Theorie der singulären Moduln geführt wird, für welche die complexe Multiplication der elliptischen Functionen Statt findet; eine nähere Ausführung dieser Untersuchung, in welcher die Composition der quadratischen Formen eine wesentliche Rolle spielt, muss ich mir aber für eine andere Gelegenheit versparen.

Braunschweig, den 12. Juni 1877.

Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.

(By *Simon Newcomb*, Washington U. S. of North America.)

The following theorems are founded on the ideas of ***Riemann***, as set forth in his celebrated dissertation „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", though they may not be entirely accordant with his remarks on the result of his theory. It appears not uninteresting to consider the subject from the stand point of elementary geometry instead of following the analytic method which has been commonly employed by writers on the non-Euclidian geometry. The system here set forth is founded on the following three postulates.

1. I assume that space is triply extended, unbounded, without properties dependent either upon position or direction, and possessing such planeness in its smallest parts that both the postulates of the Euclidian geometry, and our common conceptions of the relations of the parts of space are true for every indefinitely small region in space.

2. I assume that this space is affected with such curvature that a right line shall always return into itself at the end of a finite and real distance $2D$ without losing, in any part of its course, that symmetry with respect to space on all sides of it which constitutes the fundamental property of our conception of it.

3. I assume that if two right lines emanate from the same point, making the indefinitely small angle α with each other, their distance apart at the distance r from the point of intersection will be given by the equation

$$s = \frac{2\alpha D}{\pi} \sin \frac{r\pi}{2D}.$$

The right line thus has this property in common with the Euclidian right line that two such lines intersect in only a single point. It may be that the number of points in which two such lines can intersect admits of being determined from the laws of curvature, but not being able so to de-

termine it, I assume as a postulate the fundamental property of the Euclidian right line. It remains to be seen whether this assumption leads to any conclusions either inconsistent with themselves or to the Euclidian geometry in any small region of space.

The following nomenclature may be used.

A ***complete right line*** is one returning into itself as supposed in postulate 2. Any small portion of it is to be conceived of as a Euclidian right line. It may be called a right line simply when no ambiguity will result therefrom.

The locus of all complete right lines passing through the same point, and lying in the same Euclidian plane containing that point will be called a ***complete plane***.

A ***region*** will mean any indefinitely small portion of space, in which we are to conceive of the Euclidian geometry as holding true. Within any region whatever figures may be designated as Euclidian in order to avoid confusing them with the more complicated relations which have place in the geometry of curved space.

The following propositions are for the most part, presented without demonstration as being either too obvious to require it or obtainable by processes which leave no doubt of their validity. A few will need at least the outlines of a demonstration.

I. From postulates 1. and 2. it follows that ***all complete right lines are of the same length*** $2D$. Hence D is the greatest possible distance at which any two points in space can be situated, it being supposed that the distance is measured on the line of least absolute length. If two moving points start out in opposite directions from a point A on a right line α, they will meet at the distance D in a point which we may designate as $A'\alpha$.

II. ***The complete plane is a Euclidian plane in every region of its extent.*** For, let α, α', and α'' be three successive positions of the generating right line, and let r, r', and r'' be three points each at any distance r from the common point of intersection of the lines α, α' and α''. Then, considering the Euclidian plane containing the line α and the point r', there can, owing to the symmetry of space on each side (postulate 1.) be no reason why the line α' should intersect this plane in one direction rather than in another, it will therefore wholly lie in it. And, from the same postulate, there is no reason why the line α'' should pass on one side of

the plane $\alpha r'$ rather than on the other; it will therefore lie in it. Therefore, in every region, the consecutive positions of the generating line lie in the same Euclidian plane.

III. ***Every system of right lines, passing through a common point A and making an indefinitely small angle with each other, are parallel to each other in the region A′ at distance D.*** From postulate 3. it follows that in this region we have $\frac{ds}{dr} = 0$, while, by proposition II., every pair lie in the same plane. Conversely, since two points completely determine a right line, it follows that ***all lines which are parallel in the same region intersect in a common point at the distance D from that region.***

IV. ***If a system of right lines pass in the same plane through A, the locus of their most distant points will be a complete right line.*** It is obvious that this locus will be everywhere perpendicular to the generating line, because there is no reason why the angle on one side should be different from that on the other. Moreover, there is no reason why the locus, at any point should deviate to one side of the Euclidian plane containing two consecutive positions of the generating line rather than to the other. It will therefore, in every region, be a Euclidian right line. And, when the generating line has turned through 180°, the most distant point will have returned to its original position: it will therefore have described a complete right line.

V. ***The locus of all the points at distance D from a fixed point A, is a complete plane, and, indeed, a double plane if we consider as distinct the coincident surfaces in which the two opposite lines meet.*** For, let us imagine a series of right lines passing in one plane through a common point A. The locus of their most distant points will then, by the last proposition be a complete right line β. Then, suppose this plane to revolve round a Euclidian right line lying in it at the point A. The locus β will then revolve round the point A' in a plane, and will therefore describe a complete plane.

We have here a partially independent proof of proposition II., since the locus in question must be alike in all its parts. The basis of this second proof is proposition IV. which rests on the basis that the most distant region of a revolving line describes a Euclidian plane.

VI. ***Conversely, all right lines perpendicular to the same complete plane meet in a point at the distance D on each side of the plane.*** This

point may be called the pole of the plane, and the plane itself may be called the polar plane of the point. The position of a complete plane in space is completely determined by that of its pole, and *vice versa.* The poles of all planes passing through a point lie in the polar plane of that point.

VII. *For every complete right line, there is a conjugate complete right line such that every point of the one is at distance D from every point of the other.* A line may be changed into its conjugate by two rotations of 90° each around a pair of opposite points.

The three last propositions may be combined as follows. If we call one locus polar to another when every point of the one is at distance D from every point of the other, then, the polar of a point will be a plane, that of a right line will be another right line, and that of a plane will be a point. And, every locus will be completely determined by its polar.

VIII. *Any two planes in space have, as a common perpendicular, the right line joining their poles, and intersect each other in the conjugate to that right line.*

IX. *If a system of right lines pass through a point, their conjugates will be in the polar plane of that point. If they also be in the same plane, the conjugates will all pass through the pole of that plane.*

X. From postulate 3. it may be deduced that the relation between the sides, a, b, and c of a plane triangle in curved space, and their opposite angles A, B, C, will be the same as in a Euclidian spherical triangle of which the corresponding sides are $\frac{a\pi}{2D}$, $\frac{b\pi}{2D}$ and $\frac{c\pi}{2D}$*). That is, the relation

*) To prove this, in a rectilineal triangle of which a, b and c are the sides, and A, B and C the opposite angles let us consider b and C as constant, and a, c and B as functions of A. To find the differential variations of a, c and B, we substitute dA for α in Postulate III: we then find

$$\frac{da}{dA} = \frac{2D}{\pi \sin B} \sin \frac{c\pi}{2D},$$

$$\frac{dc}{dA} = \frac{2D}{\pi \operatorname{tang} B} \sin \frac{c\pi}{2D},$$

$$\frac{dB}{dA} = -\cos \frac{c\pi}{2D}.$$

The integrals of these equations may be expressed in the form

$$\sin \frac{c\pi}{2D} \sin B = C_1,$$

$$\cos \frac{c\pi}{2D} = \sqrt{1-C_1^2} \cos \frac{\pi}{2D}(a - C_2),$$

$$\cos B = \sqrt{1-C_1^2} \sin(A - C_3),$$

in question is expressed by the formulae

$$\sin\frac{a\pi}{2D}:\sin\frac{b\pi}{2D}:\sin\frac{c\pi}{2D} = \sin A:\sin B:\sin C.$$

From this it follows that the right line is a minimum distance between any two points whether we follow it in one direction or the other, that is, whether we consider it as greater or less than D. For, let A and B be the two points, and P the middle point of a line joining AB, lying near the straight line AB. Since $AP = PB < D$, it is evident that the shortest line joining AB and passing through P is composed of the two right lines $AP + PB$. But, by the formulae of spherical trigonometry we have $AB < AP + PB$, so that AB is a minimum line so long as its product by $\frac{\pi}{2D}$ is less than π, that is, so long as it is less than $2D$.

XI. ***Space is finite, and its total volume admits of being definitely expressed by a number of Euclidian solid units which is a function of D.*** We may conceive space as filled in the following way: If a crowd of beings should proceed to form a sphere of matter by building out on all sides from a common centre, they themselves living on the constantly growing surface, then, just before the sphere attained the radius D each being would see those who were diametrically opposite directly above him, so that, in each region, the only vacant space left would be contained between two Euclidian planes separated by the distance $2(D-r)$, r being the radius of the solid sphere. If the building should be continual until these two surfaces met at every point, all space would be filled.

XII. The third postulate affords us the means of readily determining the elementary relations of circular and spherical figures in space. We

---

C_1, C_2 and C_3 being arbitrary constants. These constants must be so taken that we shall have simultaneously

$$A = 0,$$
$$c = b,$$
$$a = 0,$$
$$B = 2\pi - C$$

which conditions give

$$C_1 = \sin C \sin\frac{b\pi}{2D},$$
$$\sqrt{1-C_1^2}\cos\frac{\pi C_2}{2D} = \cos\frac{b\pi}{2D},$$
$$\sqrt{1-C_1^2}\sin C_3 = \cos C.$$

When the values of the arbitrary constants derived from these equations are substituted in the integrals, we have the fundamental equations of spherical trigonometry.

see at once by the equation

$$ds = \frac{2D}{\pi}\sin\frac{r\pi}{2D}\,d\alpha$$

that the circumference of a circle of radius r is $4D\sin\frac{r\pi}{2D}$. When $r = D$ the circle will form two complete right lines, as it should, because the two ends of every diameter then meet. For the area of a circle of radius r we readily find the expression

$$\text{Area} = \frac{16D^2}{\pi}\sin^2\frac{r\pi}{4D}.$$

The area of a complete plane, counting both sides of the surface, is found by putting $r = 2D$, and is therefore $\frac{16D^2}{\pi}$. This is, in fact, easily found to be the surface generated by a complete right line revolving through 360°. The reason for considering the complete plane as a double surface will be seen presently.

The surface of a sphere of radius r is

$$\text{Surface} = \frac{16D^2}{\pi}\sin^2\frac{r\pi}{2D},$$

and its volume

$$\frac{8D^2}{\pi}\left(r - \frac{D}{\pi}\sin\frac{r\pi}{D}\right).$$

The total volume of space will be found by putting $r = D$, which will give

$$\text{Total volume} = \frac{8D^3}{\pi}.$$

XIII. ***The two sides of a complete plane are not distinct, as in a Euclidian surface.*** If we draw a complete straight line on one side of a plane, it will, at the point of completion, be found on the other side, and must be completed a second time if it is to be closed without intersecting the plane. It will, in fact, be a complete circle of radius D. (prop. XII.) If, in the case supposed in XI., just before space is filled, a being should travel to distance $2D$, he would, on his return, find himself on the opposite surface to that on which he started, and would have to repeat his journey in order to return to his original position without leaving the surface. In this property we find a certain amount of reason for considering the complete plane as a double surface.

XIV. The following proposition is intimately connected with the preceding one. If, moving along a right line, we erect an indefinite series of perpendiculars, each in the same Euclidian plane with the one which precedes it, then, on completing the line and returning to our starting point, the perpendiculars will be found pointing in a direction the opposite of that with which we started.

It may be remarked that the law of curvature here supposed does not seem to coincide with one of the conclusions of *Riemann*. The latter says: „Man würde, wenn man die in einem Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit constantem positiven Krümmungsmaass, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Gestalt einer Kugelfläche annehmen würde und welche folglich endlich ist." If by this is meant that if the triply extended curved space became plane space, the complete plane would become a sphere, a discussion of the proposition would be too long to be entered upon here. I cite it only to remark that the complete plane described in the present paper must by no means be confounded with a sphere from which it differs in several very essential characteristics.

α. It has no diameter: a straight line, whether normal to it or not, only intersects it in a single point.

β. The shortest line connecting any two points of it lies upon it.

γ. The locus of the most distant point upon it is not a point, but a right line.

In the same way, the complete right line does not possess the properties of a circle. It does not intersect its normal plane at more than a single point: the most distant point upon it is, on the contrary, at greatest possible distance from the normal plane.

It may be also remarked that there is nothing within our experience which will justify a denial of the possibility that the space in which we find ourselves may be curved in the manner here supposed. It might be claimed that the distance of the farthest visible star is but a small fraction of the greatest distance *D*, but nothing more. The subjective impossibility of conceiving of the relation of the most distant points in such a space does not render its existence incredible. In fact our difficulty is not unlike that which must have been felt by the first man to whom the idea of the sphericity of the earth was suggested in conceiving how, by travelling in a constant direction, he could return to the point from which he started without, during his journey, finding any sensible change in the direction of gravity.

Washington, 1877.

Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen.

(Von Herrn *F. Schottky*.)

In einer Ebene, deren Punkte durch die Werthe einer complexen Variablen $x = \xi + i\eta$ bestimmt sind, sei eine geschlossene sich nicht selbst schneidende Linie L gezogen. Den von dieser Linie umschlossenen einfach zusammenhängenden Bereich bezeichnen wir mit A. Durch eine Transformation der Variablen: $x' = f(x)$ lässt sich diese Fläche auf eine andere Ebene x' conform abbilden, und zwar so, dass die Grenze des Abbildes A' eine beliebig vorgeschriebene einfache geschlossene Linie der Ebene x' wird. Die Abbildung wird eine völlig bestimmte, wenn man je einen Punkt im Innern und je einen Punkt auf den Grenzen beider Flächen einander zuordnet; diese Punkte aber kann man willkürlich wählen.

Wir nehmen für A' einen bestimmten Bereich der Ebene x', nämlich die positive Halbebene; die Grenze von A' ist dann die reelle Linie. In diesem Falle nimmt der eben angeführte Satz folgende Form an: Es lässt sich eine Function $x' = f(x)$ bestimmen, welche im Innern des Bereichs A alle complexen Werthe der positiven Halbebene, und zwar jeden einmal annimmt. Diese Function ist vollständig bestimmt, wenn wir einen Punkt im Innern von A angeben, in welchem $f(x) = i$, und einen zweiten auf der Grenze, in welchem $f(x) = 0$ sein soll. Es möge hier kurz angegeben werden, in welcher Weise man zu dieser Function durch einen allgemeinen, von Herrn *Schwarz* bewiesenen Satz gelangt *). Dieser Satz lautet:

Ist A ein einfach oder mehrfach zusammenhängender Bereich von endlicher Ausdehnung, und wird für alle Punkte der Begrenzung desselben eindeutig eine endliche, stetig veränderliche Grösse z definirt, so giebt es eine und nur eine im Innern von A mit ihren sämmtlichen Differential-

---

*) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Von Herrn *H. A. Schwarz*. Aus dem Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom October 1870.

quotienten endliche, stetige und eindeutige Function u, welche der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ genügt, und deren Werth an der Begrenzung von A mit dem von z übereinstimmt *).

Von diesem Satze lässt sich, zunächst für das einfach zusammenhängende Gebiet A, folgende Anwendung machen:

Es sei $p(x)$ eine rationale Function von x mit willkürlichen reellen oder complexen Coefficienten, die nur der Bedingung unterworfen ist, dass keine der Stellen, wofür sie unendlich wird, auf der Linie L liegt. Dann folgt aus dem angeführten Theorem, dass eine Function $F(x)$ existirt, deren imaginärer Theil an der Grenze von A mit dem imaginären Theile von $p(x)$ übereinstimmt, und die im Innern dieses Bereichs überall den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt. Hieraus ergiebt sich die Existenz einer Function $K(x) = p(x) - F(x)$, welche sich im Innern von A verhält wie die rationale $p(x)$ und an der Linie L reelle Werthe annimmt.

Durch diese beiden Bedingungen ist zugleich $K(x)$ bis auf eine additive reelle Constante völlig bestimmt. Wird $p(x)$ an keiner Stelle des Bereichs unendlich, so ist $K(x)$ eine reelle Constante. Ferner: Bildet man aus mehreren Functionen dieser Art einen rationalen Ausdruck mit reellen Coefficienten, so wird durch diesen gleichfalls eine Function derselben Art dargestellt.

Wir bilden nun zwei besondere Functionen $K(x)$, indem wir einmal $p(x) = \frac{1}{x-a}$ setzen (wo $x = a$ einen Punkt im Innern des Bereichs bedeuten soll), das andere Mal $p(x) = \frac{i}{x-a}$. Dann lassen sich diese beiden Functionen in der Nähe des Punktes $x = a$ in folgender Weise entwickeln:

$$u = \frac{1}{x-a} + u_0 + u_1(x-a) + \text{etc.},$$

$$v = \frac{i}{x-a} + v_0 + v_1(x-a) + \text{etc.}$$

Es lässt sich zuerst beweisen, dass alle Functionen $K(x)$ sich rational und reell durch u und v darstellen lassen. Aber u und v selbst

*) Herr *Schwarz* hat zwei Beweise dieses Satzes angegeben, von denen der eine sich auf eine Fläche bezieht, die einfach oder mehrfach zusammenhängend sein kann, deren Grenze aber aus einer endlichen Anzahl von Theilen analytischer Linien zusammengesetzt ist, der zweite auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Grenze dieser Bedingung nicht unterworfen ist, aber überall convex gekrümmt ist. Mit Hülfe dieses letzteren Resultats lässt sich durch das alternirende Verfahren, dessen Herr *Schwarz* sich bedient, der allgemeine Satz in der angegebenen Form beweisen.

sind durch eine quadratische Gleichung verbunden. Setzt man $u_0 + v_0 i = g + h i$, wo g und h reelle Grössen bedeuten sollen, so ergiebt sich aus den beiden Entwickelungen von u und v, dass der Ausdruck

$$(u-g)^2 + (v-h)^2$$

an der Stelle $x = a$ nicht unendlich wird. Er hat also überall im Innern und an der Grenze einen endlichen Werth und ist reell an der Grenze; er muss daher einer Constanten gleich sein, die wir, da sie jedenfalls positiv ist, durch R^2 bezeichnen. Es ist also

$$(u-g)^2 + (v-h)^2 = R^2.$$

Setzen wir nun $t = \frac{v-h+R}{u-g}$, so lassen sich u und v und daher auch alle übrigen Functionen $K(x)$ rational und reell durch t ausdrücken. Weiter kann bewiesen werden: t nimmt im Innern von A nur solche complexen Werthe an, deren zweite Coordinate positiv ist (im Punkte $x = a$ ist $t = i$); und zwar jeden derselben einmal. Alles dies gilt noch wenn wir t ersetzen durch eine lineare Function mit reellen Coefficienten: $\tau = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t}$. Nur müssen die Coefficienten der Ungleichheit $\beta\gamma - \alpha\delta > 0$ genügen, damit für $t = i$ auch die zweite Coordinate von τ positiv wird. Man kann $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen, dass im Punkte $x = a$ wieder $\tau = i$ wird; dann ist $\tau = \frac{t - \varkappa}{1 + \varkappa t}$, und über $\varkappa$ wiederum so verfügen, dass τ an einer vorgeschriebenen Stelle der Grenze verschwindet. — Die Untersuchung der Beziehungen, welche zwischen den Functionen $K(x)$ besteht, führt also hier zur Kenntniss der Bedingungen, unter denen die conforme Abbildung des Bereichs in die Halbebene möglich ist.

§. 1.

Es möge zunächst wieder von der unendlichen Ebene der complexen Grösse $x = \xi + \eta i$ durch eine einfache geschlossene Linie L_0 ein endlicher Bereich abgesondert werden; in diesem sollen noch $n-1$ andere Linien $L_1, L_2, \dots L_{n-1}$ von derselben Beschaffenheit, deren jede ein besonderes Gebiet einschliesst, gezogen sein. Dann entsteht ein n-fach zusammenhängender Theil der Ebene, der nach aussen durch L_0, nach innen durch $L_1 L_2 \dots L_{n-1}$ begrenzt ist. Diesen bezeichnen wir mit A.

Wir bilden jetzt folgenden Ausdruck:

$$p(x) = R(x) + iC_1 \log R_1(x) + iC_2 \log R_2(x) + \text{ etc.}$$

C_1, C_2 etc. sollen reelle Constanten, $R(x)$, $R_1(x)$ etc. rationale Functionen von x mit willkürlichen reellen oder complexen Coefficienten bedeuten, die nur so beschränkt werden müssen, dass $p(x)$ an keiner Stelle der Begrenzung von A unendlich wird. Zerlegen wir dann $p(x)$ in seinen reellen und imaginären Theil:

$$p(\xi+i\eta) = p_1(\xi,\eta)+ip_2(\xi,\eta),$$

so ist $p_2(\xi,\eta)$ eine eindeutige Function, welche an jeder Stelle der Begrenzung einen bestimmten endlichen Werth besitzt. Ausserdem nehmen wir ein System von n willkürlichen reellen Constanten an:

$$c_0,\quad c_1,\quad \ldots,\quad c_{n-1},$$

und bestimmen eine Grösse z für alle Punkte der Begrenzung durch die Bedingungen: es soll $z = c_0+p_2(\xi,\eta)$ auf der Linie L_0 sein, $= c_1+p_2(\xi,\eta)$ auf L_1, und s. f.; endlich $z = c_{n-1}+p_2(\xi,\eta)$ auf der Linie L_{n-1}. Dann genügt z allen Bedingungen des in der Einleitung ausgesprochenen allgemeinen Theorems. Es giebt also eine Function $\varphi(\xi,\eta)$, welche der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0$ genügt, im Innern der Fläche A überall endlich und regulär ist, und an dem Rande derselben der eben definirten Grösse z gleich wird.

Aus der Differentialgleichung folgt, dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\eta$$

das vollständige Differential einer neuen Function $\psi(\xi,\eta)$ ist. Diese braucht nicht eindeutig zu sein; aber da ihre Differentialquotienten es sind, so kann sie sich auf einem geschlossenen Wege im Innern des Gebietes A nur um eine Periode vermehren. Eine solche wird durch das über diesen Weg auszudehnende Integral

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\eta\right) = 2\omega$$

ausgedrückt. Wir wählen $n-1$ bestimmte Periodenwege L'_1, L'_2, $\ldots$, L'_{n-1}. Die Linie L'_ν soll so gezogen sein, dass sie von den Grenzlinien L_1, L_2, $\ldots$, L_{n-1} nur L_ν umschliesst, die übrigen aber ausschliesst. Die auf diesem Integrationswege gewonnene Periode $2\omega_\nu$ ist dann unabhängig von der speziellen Form desselben. Denn es sei L''_ν eine zweite Linie, von der L'_ν in derselben Weise umschlossen wird, wie L_ν von L'_ν; dann ist das Doppelintegral

$$\int\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)d\xi\,d\eta,$$

ausgedehnt über den von L'_ν und L''_ν begrenzten Bereich, gleich

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\eta\right),$$

wenn wir dieses Integral über die beiden Grenzlinien L'_ν und L''_ν erstrecken. Nun ist das erstere Integral offenbar gleich Null; wir erhalten also:

$$2\omega_\nu-2\bar{\omega}_\nu = 0.$$

$\psi(\xi,\eta)$ besitzt also die Perioden $2\omega_1,\ 2\omega_2,\ \dots\ 2\omega_{n-1}$, und da jeder Integrationsweg sich aus Wegen der angegebenen Art zusammensetzen lässt, so lässt sich jede Periode von ψ in der Form darstellen:

$$2\omega = 2m_1\omega_1+2m_2\omega_2+\cdots+2m_{n-1}\omega_{n-1},$$

wo $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_{n-1}$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Wir bilden jetzt aus φ und ψ die complexe Function:

$$f = \psi+i\varphi.$$

Das Differential dieser Function ist

$$df = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\eta+i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,d\eta\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+i\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)(d\xi+i\,d\eta).$$

Hieraus geht hervor, dass f eine Function *einer* complexen Variablen $x=\xi+i\eta$ ist:

$$\psi(\xi,\eta)+i\varphi(\xi,\eta) = f(x).$$

Die sämmtlichen Differentialquotienten von f sind im Innern des Gebietes endliche, stetige und eindeutige Functionen. Ist daher $x=x_0$ ein Punkt im Innern von A, so lässt sich f nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ in eine convergente Reihe entwickeln.

Bildet man jetzt die Differenz

$$p(x)-f(x) = F(x),$$

so erhält man eine Function von folgenden Eigenschaften: $F(x)$ verhält sich im Innern von A wie die willkürlich gegebene logarithmisch-rationale $p(x)$ (d. h. die Differenz beider hat überall den Charakter einer ganzen Function). Zweitens: Der Werth ihres imaginären Theiles ist auf jeder der n Grenzlinien ein constanter, der willkürlich angenommen werden kann. Drittens: Die Perioden von $F(x)$ sind sämmtlich reell und setzen sich ganzzahlig zusammen aus denen von $p(x)$ und den $n-1$ von $f(x)$. Es bleibt noch zu erörtern, in welcher Weise sich $F(x)$ in der Nähe eines Punktes

$x = x_0$ der Grenze darstellen lässt. Es sei λ eine Strecke der Grenze L_ν, auf welcher der Punkt x_0 liegt; wir verbinden die Endpunkte derselben durch eine Linie μ. Dadurch entsteht ein einfach zusammenhängender Bereich α, der in der Nähe des Punktes x_0 mit A zusammenfällt. Diesen bilden wir ab durch eine Transformation $t = \varphi(x)$ auf die positive Halbebene, und zwar so, dass dem Punkte x_0 der Nullpunkt entspricht. Durch diese Transformation verwandelt sich $F(x)+c_\nu i$ in eine Function $f(t)$, welche reell ist für alle reellen Werthe von t, die innerhalb einer bestimmten Entfernung vom Nullpunkt liegen und den Charakter einer ganzen Function besitzt für alle Punkte in der Nähe des Nullpunktes, die auf der positiven Seite der reellen Linie liegen. Nun kann man für die negative Halbebene eine zweite Function $g(t)$ definiren, die an jedem Punkte den conjugirten Werth besitzt zu demjenigen, welchen $f(t)$ an dem entsprechenden Punkte der positiven Halbebene hat. Dann stimmen $f(t)$ und $g(t)$ an der reellen Linie in ihren Werthen überein; folglich ist $g(t)$ als die analytische Fortsetzung von $f(t)$ zu betrachten. Daraus aber geht hervor, dass $f(t)$ nach ganzen positiven Potenzen von t entwickelt werden kann; und da diese Function für reelle Werthe von t selbst reell ist, so müssen die Coefficienten dieser Entwickelung selbst reelle Grössen sein. Es lässt sich also $F(x)$ durch die Grösse t in der Nähe des Punktes x_0 in folgender Weise darstellen:

$$F(x) = -c_\nu i + F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \text{ etc.},$$

wo F_0, F_1, F_2 etc. reelle Coefficienten bedeuten.

§. 2.

Wir betrachten zunächst eine speciellere Gattung der im vorigen Paragraphen definirten Functionen, indem wir erstens festsetzen, dass die Constanten $c_0, c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ sämmtlich gleich Null sein sollen, und zweitens für $p(x)$ eine rationale Function $R(x)$ nehmen. Die Functionen, welche wir dann erhalten und die wir mit $H(x)$ bezeichnen, besitzen im Innern von A überall den Charakter rationaler Functionen und nehmen an der Grenze desselben reelle Werthe an.

Ein Aggregat aus mehreren H-Functionen

$$H = c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3 + \text{etc.},$$

wo c_1, c_2, c_3 etc. reelle Constanten bedeuten, ist natürlich wieder eine Function derselben Art, und wenn sich auf einem Periodenwege die ein-

zelnen H_1, H_2, H_3 etc. um $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ verändern, so ist

$$2c_1\omega_1+2c_2\omega_2+2c_3\omega_3+\cdots$$

die zu diesem Wege gehörige Periode von H. Die Coefficienten c_1, c_2 u. s. f. kann man so bestimmen, dass alle $n-1$ Perioden verschwinden. Daraus geht hervor, dass es unter den Functionen $H(x)$ solche giebt, die im Innern des Gebiets den Charakter *eindeutiger* rationaler Functionen haben. Diese bezeichnen wir durch $K(x)$. Wird aus mehreren dieser Functionen ein ganzer rationaler Ausdruck mit reellen Coefficienten gebildet, so stellt dieser wiederum eine Function der Gattung $K(x)$ dar.

Ferner: Jede Function $H(x)$ oder $K(x)$, welche an keiner Stelle unendlich wird, ist nothwendig eine reelle Constante.

Es sei jetzt $x=a$ ein Punkt im Innern von A und $p(x)$ eine rationale Function, die nur an der Stelle $x=a$ unendlich wird. Wir denken uns diese dargestellt in der Form

$$p(x) = C+\frac{C_1}{x-a}+\frac{C_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{C_m}{(x-a)^m}.$$

Jetzt soll eine aus zwei H-Functionen complex zusammengesetzte Function $\mathfrak{H}(x)=H(x)+iH'(x)$ aufgestellt werden, welche sich im Innern des Gebietes A verhält wie $p(x)$, während die ihr conjugirte $\bar{\mathfrak{H}}(x)=H(x)-iH'(x)$ an jeder Stelle dieses Bereichs einen endlichen Werth behält. Damit diese Bedingungen erfüllt seien, ist nothwendig und hinreichend, dass sich $H(x)$ im Gebiete A verhalte wie $\frac{1}{2}p(x)$, $H'(x)$ wie $\frac{-i}{2}p(x)$. Die Function $\mathfrak{H}(x)$ ist also bis auf eine additive Constante völlig bestimmt.

Setzen wir $p(x)=\frac{1}{(x-a)^\mu}$, so erhalten wir eine specielle $\mathfrak{H}$-Function $\mathfrak{H}_\mu(x)$; und es ist klar, dass sich die allgemeine durch diese in folgender Weise ausdrücken lässt:

$$\mathfrak{H}(x) = \text{const.}+C_1\mathfrak{H}_1(x)+C_2\mathfrak{H}_2(x)+\cdots+C_m\mathfrak{H}_m(x).$$

Wir nehmen aber mit diesem System von Functionen noch eine Veränderung vor. Fasst man irgend eine derselben, $\mathfrak{H}_\mu(x)$, in's Auge, so ist entweder möglich, dass man zu $\mathfrak{H}_\mu(x)$ ein Aggregat niederer Ordnung

$$c_1\mathfrak{H}_{\mu-1}(x)+c_2\mathfrak{H}_{\mu-2}(x)+\cdots+c_{\mu-1}\mathfrak{H}_1(x)$$

in der Weise hinzufügen kann, dass die Summe eine eindeutige Function $\mathfrak{K}_\mu(x)$ wird. Dazu ist nur nöthig, dass, wenn wir die Perioden von $\mathfrak{H}_\mu(x)$ durch $2\omega_1^{(\mu)}$, $2\omega_2^{(\mu)}$, ... $2\omega_{n-1}^{(\mu)}$ bezeichnen, das System linearer Gleichungen

$$2\omega_h^{(\mu)}+2c_1\omega_h^{(\mu-1)}+2c_2\omega_h^{(\mu-2)}+\cdots+2c_{\mu-1}\omega_h^{(1)}=0, \quad (h=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n-1)$$

eine Auflösung zulässt. In diesem Falle ersetzen wir $\mathfrak{H}_\mu(x)$ durch $\mathfrak{K}_\mu(x)$. Oder es giebt keine eindeutige durch $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots \mathfrak{H}_\mu$ linear darstellbare Function, die von der μ^{ten} Ordnung unendlich wird; dann behalten wir $\mathfrak{H}_\mu(x)$ bei.

Demnach zerfällt die Reihe der Indices μ in zwei Gruppen. $\alpha, \beta, \gamma\dots$ seien, in steigender Aufeinanderfolge, die Indices derjenigen $\mathfrak{H}_\mu$, die wir durch die eindeutigen $\mathfrak{K}_\mu$ ersetzen konnten; $k_1, k_2, k_3\dots$ seien die übrigen. Die Anzahl ϱ der Glieder dieser letzteren Gruppe ist endlich und kleiner oder gleich $n-1$. Denn angenommen, dass es n Zahlen $k_1, k_2, \dots k_n$ gäbe, so wäre es nicht möglich, ein System von Null verschiedener Coefficienten c so zu wählen, dass

$$c_1\mathfrak{H}_{k_1}+c_2\mathfrak{H}_{k_2}+\dots+c_n\mathfrak{H}_{k_n}$$

eine eindeutige Function wird. Daraus würde folgen, dass das Gleichungssystem

$$2c_1\omega_h^{(k_1)}+2c_2\omega_h^{(k_2)}+\dots+2c_n\omega_h^{(k_n)}=0, \quad (h=1,\ 2,\ \dots\ n-1)$$

eine Auflösung nicht zulässt. Nun ist aber ein solches System immer lösbar; daher sieht man, dass die Annahme falsch ist. Es ist also $\varrho \leqq n-1$. (Wir werden später beweisen, dass nur das untere Zeichen gilt).

Es ist nun möglich jede Function $\mathfrak{H}(x)$ in folgender Weise darzustellen:

$$\mathfrak{H}(x) = C_1\mathfrak{H}_{k_1}(x)+C_2\mathfrak{H}_{k_2}(x)+\dots+C_\varrho\mathfrak{H}_{k_\varrho}(x)+A\mathfrak{K}_\alpha(x)+B\mathfrak{K}_\beta(x)+\text{etc.}+\text{const.}$$

Das Aggregat

$$C_1\mathfrak{H}_{k_1}(x)+C_2\mathfrak{H}_{k_2}(x)+\dots+C_\varrho\mathfrak{H}_{k_\varrho}(x)$$

kann für sich nie eine eindeutige Function darstellen. Ist daher $\mathfrak{H}(x)$ eindeutig, so müssen alle ϱ Coefficienten $C_1, C_2, \dots C_\varrho$ verschwinden. In diesem Falle müssen auch die beiden Functionen $H(x)$ und $H'(x)$, aus denen $\mathfrak{H}(x)$ zusammengesetzt ist, der Gattung (K) angehören. Denn angenommen, es verändere sich auf einem Periodenwege $H(x)$ um 2ω, $H'(x)$ um $2\omega'$, so ändert sich $\mathfrak{H}(x)$ um die Periode $2\omega+2\omega' i$. Soll diese Periode verschwinden, so muss sowohl ω als $\omega'=0$ sein. Wir haben also den Satz:

Alle Functionen $\mathfrak{K}(x)=K(x)+iK'(x)$, welche nur an der Stelle $x=a$ unendlich werden, während ihre conjugirte $\bar{\mathfrak{K}}(x)=K(x)-iK'(x)$ auch an dieser Stelle endlich bleibt, lassen sich in der Form darstellen:

$$\mathfrak{K}(x) = \text{const.}+A\mathfrak{K}_\alpha(x)+B\mathfrak{K}_\beta(x)+C\mathfrak{K}_\gamma(x)+\text{etc.}$$

§. 3.

Wir bezeichnen $\mathfrak{K}_\alpha(x)$, diejenige Function $\mathfrak{K}(x)$, welche an der Stelle $x=a$ von der niedrigsten Ordnung unendlich wird, mit u. Es sei ferner

μ irgend eine Zahl der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Dann können wir setzen:

$$\mu = m\alpha + \mu',$$

wo μ' entweder $= 0$ oder die kleinste in dieser Reihe enthaltene Zahl sein soll, welche $\equiv \mu \bmod \alpha$ ist. Alsdann ist $u^m \mathfrak{K}_{\mu'}(x)$ eine der Functionen $\mathfrak{K}(x)$, und da sie im Punkte $x = a$ von der μ^{ten} Ordnung unendlich wird, lässt sie sich darstellen in der Form

$$u^m \mathfrak{K}_{\mu'}(x) = \mathfrak{K}_\mu(x) + \dots + B\mathfrak{K}_\beta(x) + A\mathfrak{K}_\alpha + \text{const.}$$

Daraus geht hervor, dass in der Reihe $\mathfrak{K}_\alpha(x)$, $\mathfrak{K}_\beta(x)$, $\mathfrak{K}_\gamma(x)$ etc. $\mathfrak{K}_\mu(x)$ ersetzt werden kann durch $u^m \mathfrak{K}_{\mu'}(x)$. Führen wir das durch für alle Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \dots$, so bekommen wir ausser $\mu' = 0$, $\alpha - 1$ verschiedene Werthe von μ'. Die zu diesen Indices gehörigen Functionen $\mathfrak{K}_{\mu'}$ bezeichnen wir der Reihe nach durch $u_1, u_2, \dots u_{\alpha-1}$ und setzen $u_0 = 1$; jede Function $\mathfrak{K}_\mu(x)$ hat dann die Form $u^m u_h (h = 0, 1, 2, \dots \alpha - 1)$; daraus folgt, dass die allgemeine Function $\mathfrak{K}(x)$ sich in dieser Weise darstellen lässt:

$$\mathfrak{K}(x) = \sum_{h=0}^{\alpha-1} G_h(u) u_h,$$

wo $G_0, G_1, \dots G_{\alpha-1}$ ganze Functionen von u bezeichnen. Nun gehört aber jede Potenz einer $\mathfrak{K}$-Function wiederum derselben Gattung an. Es sei α' die kleinste unter den Zahlen α, β, γ etc., welche relativ prim zu α ist, und es sei $v = \mathfrak{K}_{\alpha'}(x)$; dann ist v und jede Potenz dieser Grösse eine lineare Function von $u_0, u_1, \dots u_{\alpha-1}$:

$$v = \Sigma G_h^{(1)}(u) u_h,$$

$$v^2 = \Sigma G_h^{(2)}(u) u_h,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$v^{\alpha-1} = \Sigma G_h^{(\alpha-1)}(u) u_h.$$

Diese Gleichungen lassen sich nach $u_1, u_2, \dots u_{\alpha-1}$ auflösen (u_0 ist gleich Eins). Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so müsste schon zwischen den Grössen $v, v^2, \dots v^{\alpha-1}$ eine lineare Gleichung bestehen, deren Coefficienten rationale Functionen von u sind. Dies ist nicht möglich. Denn die Functionen u und v lassen sich in der Nähe der Stelle $x = a$ folgendermassen entwickeln:

$$u = \frac{1}{(x-a)^\alpha} + \frac{u_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{u_{\alpha-2}}{(x-a)^{\alpha-2}} + \text{etc.}$$

$$v = \frac{1}{(x-a)^{\alpha'}} + \frac{v_{\alpha'-1}}{(x-a)^{\alpha'-1}} + \text{etc.}$$

Diese Reihen, in die Gleichung $G(u, v) = 0$ eingesetzt, müssen dieselbe identisch befriedigen. Nun ergeben sich aber aus den beiden Entwickelungen

von u und v zu einem unendlich grossen Werthe von u, α verschiedene unendlich grosse Werthe von v. Die Gleichung $G(u, v) = 0$ muss daher in Bezug auf v mindestens vom Grade α sein. Daraus geht hervor, dass sich die Grössen $u_1, u_2, \dots u_{\alpha-1}$ in folgender Weise durch u und v ausdrücken lassen

$$u_h = R_h + R_h'.v + R_h^{(2)}.v^2 + \cdots + R_h^{(\alpha-1)}.v^{\alpha-1},$$

wo R_h, R_h' u. s. w. rationale Functionen von u sind. Da nun die allgemeine Function $\mathfrak{K}$ schon auf die Form $\Sigma G_h(u) u_h$ gebracht worden war, so ergiebt sich jetzt: ***Jede Function** $\mathfrak{K}(x)$ **lässt sich rational durch** u **und** v **darstellen, und zwar in der Form:***

$$\mathfrak{K}(x) = R(u) + R'(u)v + \cdots + R^{(\alpha-1)}(u)v^{\alpha-1}.$$

v^α ist aber selbst eine solche Function; daher folgt: ***u und v sind durch eine algebraische Gleichung** $G(u, v) = 0$ **verbunden, die in Bezug auf v vom Grade α ist.***

§. 4.

Wir beweisen jetzt, dass jede eindeutige Function $K(x)$, die im Innern von A sich verhält wie eine rationale Function, und an der Begrenzung endliche reelle Werthe hat, sich rational durch u und v ausdrücken lässt.

Es seien

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots \quad x_m$$

die Stellen, an denen $K(x)$ unendlich wird, und

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \dots \quad \alpha_m$$

die zugehörigen Ordnungszahlen.

Die Function $u' = K_\alpha(x) - iK_\alpha'(x)$, die zu unserem $u = K_\alpha(x) + iK_\alpha'(x)$ conjugirt ist, hat an jeder Stelle des Gebietes einen endlichen Werth. Die Werthe von u' an den Stellen $x_1, x_2, \dots x_m$ mögen mit $g_1', g_2', \dots g_m'$ bezeichnet werden; bildet man dann den Ausdruck

$$P' = (u' - g_1')^{\alpha_1}(u' - g_2')^{\alpha_2} \dots (u' - g_m')^{\alpha_m},$$

so wird das Product $K(x).P'$ an keiner Stelle des Gebietes A mehr unendlich. Dieses Product ist aber rational zusammengesetzt aus $K(x)$, $K_\alpha(x)$ und $K_\alpha'(x)$; man kann es daher in zwei K-Functionen zerlegen

$$K(x)P' = K_1(x) - iK_2(x).$$

Hiervon erhält man den conjugirten Ausdruck, indem man u' in u ver-

wandelt und die Grössen $g'_1, g'_2, \dots g'_m$ durch ihre conjugirten Werthe $g_1, g_2, \dots g_m$ ersetzt. Bezeichnet man also mit P das Product

$$P = (u-g_1)^{\alpha_1}(u-g_2)^{\alpha_2}\dots(u-g_m)^{\alpha_m},$$

so ist $K(x)P$ eine Function $K_1(x)+iK_2(x)$, deren conjugirte an keiner Stelle des Gebietes A unendlich wird.

Es seien ferner $h_1, h_2, \dots h_m$ die Werthe der Function u an den Punkten $x_1, x_2, \dots x_m$; dann bilden wir das Product

$$Q = (u-h_1)^{\alpha_1}(u-h_2)^{\alpha_2}\dots(u-h_m)^{\alpha_m}.$$

(Wenn der Punkt a sich unter den singulären befindet, fällt in dem Ausdruck Q der auf diesen Punkt bezügliche Factor fort.) Dann ist $K(x).P.Q$ eine Function, welche nur an der Stelle $x = a$ unendlich wird, und welche ausserdem die Eigenschaft besitzt, dass ihre conjugirte an jedem Punkte des Gebietes A einen endlichen Werth besitzt. Eine solche aber ist rational durch u und v ausdrückbar, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde. Es ist daher $K(x).P.Q$ und folglich auch $K(x)$ selbst eine rationale Function von u und v, und somit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

u und v sind aber Grössen, die an der Grenze nicht reelle Werthe annehmen und daher nicht zu der Klasse der Grössen K gehören, obgleich sie aus solchen rational zusammengesetzt sind. Wir wollen sie deshalb ersetzen durch zwei K-Functionen p und q. Damit nun jede Function dieser Gattung rational durch p und q ausdrückbar sei, ist nur nothwendig, dass wir p und q in der Weise wählen, dass u und v rationale Functionen von p und q werden. Wir setzen $u = u_1+iu_2$, $v = v_1+iv_2$, wo u_1, v_1, u_2, v_2 K-Functionen sind. Wir können deshalb u_2, v_1, v_2 auffassen als algebraische Functionen von u_1. Setzen wir dann $u_1 = p$, $\lambda u_2+\mu v_1+\nu v_2 = q$, wo λ, μ, ν reelle Constanten bedeuten sollen, so ist aus der Algebra bekannt, dass sich u_2, v_1, v_2 rational durch p und q ausdrücken lassen, falls den Grössen λ, μ, ν nicht bestimmte singuläre Werthe beigelegt werden. Wir können also p und q so wählen, dass u_1+iu_2, v_1+iv_2 rationale Functionen dieser Grössen werden: $u = R(p, q)$, $v = R'(p, q)$. p und q sind dann ebenfalls durch eine Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ verbunden, die wir aus $G(u, v) = 0$ erhalten, wenn wir diese Ausdrücke in die letztere Gleichung einsetzen. Die Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ muss aber reell sein in ihren Coefficienten; denn da die Functionen p und q an jedem Punkte der Begrenzung reelle Werthe haben, so giebt es unendlich viele reelle Werthepaare (p, q). Nach dieser Transformation lässt sich der obige Satz folgendermassen aussprechen:

Alle Functionen der Gattung K sind mit einander durch algebraische Gleichungen mit reellen Coefficienten verbunden. Aus denselben lassen sich zwei besondere p und q in der Weise auswählen, dass jede Function $K(x)$ eine rationale Function von p und q wird, und zwar mit reellen Coefficienten. Letzteres ist unmittelbar klar. Denn wäre $K(x) = R_1(p, q) + iR_2(p, q)$, so müsste $R_2(p, q)$, als Function von x betrachtet, an jedem Punkte der Grenze verschwinden; es müsste also $R_2(p, q)$ für unendlich viele Werthepaare (p, q) den Werth Null haben. Daraus folgt, dass $R_2(p, q)$ identisch Null sein muss.

Es fragt sich jetzt, in welcher Weise die im Anfang definirten allgemeinsten Functionen $F(x)$ durch p und q dargestellt werden können.

Es sei $F(x)$ irgend eine derselben. Da $F(x)$ im Innern von A der Definition zufolge überall den Charakter eines Logarithmus oder einer rationalen Function besitzt und nur periodisch vielwerthig sein kann, so hat die Ableitung $\frac{dF(x)}{dx}$ überall den Charakter einer eindeutigen rationalen Function. Dasselbe gilt von $\frac{dp}{dx} = \frac{dK(x)}{dx}$, also auch von dem Quotienten $\frac{F'(x)}{K'(x)} = \frac{dF}{dp}$.

Betrachten wir jetzt das Verhalten dieses Quotienten an einem Punkte x_0 der Grenze. Wenn wir, wie im ersten Paragraphen, für x die Grösse t einsetzen, so geht $\frac{F'(x)}{K'(x)}$ über in

$$\frac{dF}{dp} = \frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{dp}{dt}}.$$

Hier lässt sich sowohl der Zähler als der Nenner in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t mit reellen Coefficienten entwickeln. Führt man die Division aus, so ergiebt sich:

$$\frac{dF}{dp} = C_\mu t^\mu + C_{\mu+1} t^{\mu+1} + C_{\mu+2} t^{\mu+2} + \text{etc.} \ldots,$$

wo μ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null sein kann, C_μ, $C_{\mu+1}$ etc. reelle Coefficienten sind. Wir können leicht eine ganze Function $G(p)$ mit reellen Coefficienten bilden, so dass das Product $G(p)\frac{dF}{dp}$ an keiner Stelle der Grenze unendlich wird; dann hat dasselbe alle Eigenschaften einer Function $K(x)$ und ist daher rational durch p und q ausdrückbar. Es ist also auch $\frac{dF}{dp}$ eine rationale Function von p und q, mithin F eine Integralfunction dieser Grössen. Daraus folgt der Satz:

Alle Functionen der Gattungen $F(x)$ und $H(x)$ sind reelle Integralfunctionen der Grössen p und q.

§. 5.

I. Es sei $x = x_0$ ein beliebiger Punkt im Innern von A. Dann können wir, wie gezeigt worden ist, zwei Functionen $K_1(x)$, $K_2(x)$ bilden, welche sich in der Nähe dieses Punktes in folgender Weise entwickeln lassen:

$$K_1(x) = i(x-x_0)^{-\mu} + C_1(x-x_0)^{-\mu+1} + \cdots$$
$$K_2(x) = (x-x_0)^{-\mu} + C_1'(x-x_0)^{-\mu+1} + \cdots$$

Beide sind rationale Functionen von p und q mit reellen Coefficienten, also auch ihr Quotient

$$\frac{K_1(x)}{K_2(x)} = R(p, q).$$

Dieser rationale Ausdruck muss einen reellen Werth erhalten, wenn für (p, q) ein reelles Werthepaar eingesetzt wird. Nun ist aber, wenn wir mit (p_0, q_0) die Werthe von p und q im Punkte x_0 bezeichnen,

$$R(p_0, q_0) = i;$$

folglich kann (p_0, q_0) kein reelles Werthepaar sein. Es gilt daher der Satz:

An jeder Stelle im Innern von A muss wenigstens eine der Grössen (p, q) einen imaginären Werth besitzen.

II. Nach der von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor *Weierstrass* als Einleitung zu den *Abel*schen Functionen (Wintersemester 1873|74) gegebenen Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, aus welcher die ganze Methode dieser Untersuchung geschöpft ist, ist es stets möglich, rationale Functionen der durch eine irreductible Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ verbundenen Grössen p, q zu bilden, welche nur an einer willkürlich gewählten Stelle des durch diese Gleichung definirten Gebildes unendlich werden.

Es sei (p_0, q_0) ein reelles Werthepaar, das der Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ genügt; dann giebt es jedenfalls eine rationale Function $R(p, q)$ mit reellen Coefficienten, welche nur an dieser Stelle des algebraischen Gebildes unendlich wird. Denken wir uns jetzt p und q als Functionen von x, so geht $R(p, q)$ über in eine Function von x, die an der Grenze des Gebietes A reelle Werthe annimmt und nur für solche Werthe des x unendlich wird, wofür p den Werth p_0, q den Werth q_0 hat. Im Innern von A kann daher nach dem vorigen Satze $f(x)$ nicht unendlich werden. Eine eindeutige

Function, welche an den Grenzen reell ist und weder im Innern noch auf der Begrenzung unendlich wird, existirt aber nicht, ausser der Constanten; daraus folgt, dass $f(x)$ mindestens an einem Punkte der Begrenzung unendlich werden muss. Es muss also auch mindestens einen Punkt auf den Linien L geben, in dem $p = p_0$, $q = q_0$ wird. Wir sehen also:

Jeder reellen Stelle des Gebildes (p, q) entspricht mindestens ein Punkt auf der Begrenzung von A.

III. Es sei jetzt $p_0 = a+bi$, $q_0 = c+di$ eine imaginäre Stelle des Gebildes. Bilden wir dann eine Function $R(p,q)$, welche nur an dieser Stelle unendlich wird, so ist diese nothwendig complex in ihren Coefficienten; sie möge deshalb dargestellt sein in der Form

$$R(p,q) = R_1(p,q)+iR_2(p,q),$$

wo R_1 und R_2 alsdann reelle Ausdrücke sind, die nur an der Stelle (p_0, q_0) und der zu ihr conjugirten $p_0' = a-bi$, $q_0' = c-di$ unendlich werden. Setzen wir nun $R_1(p, q) = f(x)$, $R_2(p, q) = g(x)$, so sind dieses Functionen von der Gattung $K(x)$; denn da R_1 und R_2 für jedes reelle Werthepaar p, q endlich sind, so können $f(x)$ und $g(x)$ an keiner Stelle der Begrenzung unendlich werden. Folglich muss wenigstens ein Punkt im Innern von A vorhanden sein, an welchem $f(x)$ und $g(x)$ unendlich grosse Werthe erhalten. Dies ist aber nur möglich, wenn dort entweder $p = p_0$, $q = q_0$, oder $p = p_0'$, $q = q_0'$ wird. Hieraus ergiebt sich:

Sind (p_0, q_0) und (p_0', q_0') zwei conjugirte imaginäre Stellen des Gebildes, so muss einem dieser Werthepaare ein Punkt im Innern des Gebietes entsprechen.

IV. ***Aber es giebt auch nur einen Punkt, an welchem p und q die Werthe des einen Paares annehmen, dem anderen Paare entspricht dann gar kein Punkt im Innern von A.*** Denn im Punkte x_0 möge $p = p_0$, $q = q_0$ sein. Dann bilden wir eine Function $K(x)$, die nur an dieser Stelle unendlich wird. Drücken wir diese durch p und q aus, $K(x) = R(p, q)$, so wird $R(p, q)$ unendlich, wenn $p = p_0$, $q = q_0$ oder $p = p_0'$, $q = q_0'$ gesetzt wird. Einen Punkt, an welchem $p = p_0'$, $q = q_0'$ wird, kann es demnach im Innern der Fläche nicht geben. Aber es kann auch kein anderer Punkt existiren ausser $x = x_0$, an welchem $p = p_0$, $q = q_0$ wird, weil sonst in diesem $R(p, q)$ ebenfalls unendlich werden würde.

Fasst man nun zu jedem Punkte x_0 des Gebietes A die entsprechende Stelle (p_0, q_0) des algebraischen Gebildes (p, q) auf, so erhält man einen continuirlichen Theil desselben, den wir mit B bezeichnen. Dann folgt zunächst

[illegible] dass man jede Stelle von B nur einmal [illegible] den Stellen von B conjugirten Punkte, [illegible] dass B und B' sich an keiner Stelle decken, und aus [illegible] dass jede imaginäre Stelle des Gebildes in [illegible] Theile liegen muss.

[illegible] zerfällt also in zwei conjugirte Hälften, B und B' [illegible] dass man von jedem Punkte der einen Hälfte zu jedem Punkte derselben Hälfte gelangen kann, ohne die reelle Linie zu überschreiten, dagegen zu keinem Punkte der anderen Hälfte.

[illegible] einen Punkt x_0 auf der auf einer der Linien L liegt; [illegible] $p = p_0$, $q = q_0$. Wir bezeichnen nun mit α denjenigen Theil [illegible] in welchem $|p - p_0| < \delta$, $|q - q_0| < \varepsilon$ ist, wo δ und ε beliebig kleine [illegible] positive Grössen sind. Dadurch kann dieser Bereich beliebig klein gemacht werden; es kann also bewirkt werden, dass alle seine Punkte dem Punkte x_0 beliebig nahe liegen. Jeder zweite Punkt [illegible] in welchem ebenfalls $p = p_0$, $q = q_0$ würde, müsste nun auf der Grenze von α liegen; daraus erkennt man, dass er mit x_0 zusammenfallen muss.

Es wurde bewiesen, dass zu jedem reellen Werthepaare (p_0, q_0) mindestens ein Punkt x auf der Grenze gehört; hier sehen wir, dass nur ein einziger Punkt dazu gehört. Es entspricht also jeder Stelle im Innern oder auf der Grenze von B ein bestimmter Punkt im Innern oder auf der Grenze von A, und umgekehrt. Die Grenze von B ist die reelle Curve $\mathfrak{G}(p, q) = 0$. Jedem geschlossenen Zweige dieser Curve muss nun eine geschlossene Linie der Begrenzung des Gebietes A entsprechen, und umgekehrt; daraus [illegible] wir, dass die Curve $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ aus n geschlossenen und von einander getrennten Theilen bestehen muss.

§. 6.

Die Function $\mathfrak{R}_\mu(x)$ war so definirt worden, dass sie nur an der Stelle $x = a$ unendlich wurde, während die conjugirte überall einen endlichen Werth behielt. Es sei $\mathfrak{R}_\mu(x) = R(p, q; i)$; dann ist $\bar{\mathfrak{R}}_\mu(x) = R(p, q; -i)$.

Ist (α, β) die dem Punkte $x = a$ entsprechende Stelle, so hat $R(p, q; i)$ in dem Theile B' des algebraischen Gebildes überall einen endlichen Werth, mit Ausnahme der Stelle (α, β). Es sei nun (p_0, q_0) irgend ein dem Innern von B' angehöriges Werthepaar, und (p_1, q_1) das conjugirte in B; da $\bar{\mathfrak{R}}_\mu(x)$ im Innern von A überall endlich sein soll, so hat dann $R(p_0, q_0; -i)$ einen

endlichen Werth, den wir durch $P+Qi$ bezeichnen. Daraus folgt aber $R(p_0', q_0'; i) = P-Qi$; mithin hat $R(p, q; i)$ an jeder Stelle von B' einen endlichen Werth. Es wird also $R(p, q; i)$ überhaupt nur an der einen Stelle (g, h) des Gebildes unendlich, und zwar, wie man leicht erkennt, von der μ^{ten} Ordnung.

Nun giebt es, wie wir gesehen haben, Functionen dieser Art, welche nur an der einen Stelle (g, h) unendlich werden, stets wenn μ eine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ist; dagegen giebt es keine solche Function, wenn μ eine Zahl aus der Reihe $k_1, k_2, \ldots k_\varrho$ ist. Die Anzahl ϱ dieser in der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nicht vorkommenden Zahlen, welche unabhängig ist von der Wahl der Stelle (g, h), nennt Herr *Weierstrass* den Rang der Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ *).

Wir haben früher gesehen, dass $\varrho \leqq n-1$ ist. Es soll jetzt gezeigt werden, dass nur das untere Zeichen gilt.

Zu diesem Zweck betrachten wir diejenigen Functionen $F(x)$, welche im Innern des Gebietes A überall den Charakter ganzer Functionen haben, und bezeichnen dieselben durch $J(x)$. Es sei $J_\mu(x)$ diejenige Function $J(x)$, deren imaginärer Theil an der Linie L_μ den Werth i, an allen anderen Grenzlinien den Werth Null besitzt. Dann erhalten wir die allgemeinste J-Function, deren imaginärer Theil an den Linien $L_0, L_1, \ldots L_{n-1}$ die willkürlich gewählten Werthe $c_0 i, c_1 i, \ldots c_{n-1} i$ besitzt, wenn wir setzen:

$$J(x) = c_0 i + \sum_{\mu=1}^{n-1} (c_\mu - c_0) J_\mu(x).$$

Angenommen es bestände zwischen $J_1(x), J_2(x), \ldots J_{n-1}(x)$ eine lineare Relation

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} (A_\mu + B_\mu i) J_\mu(x) = A + Bi,$$

so würde sich, da

$$J_\mu(x) = \int R_\mu(p, q)\, dp$$

eine reelle Integralfunction der Grössen p und q ist, durch Differentiation ergeben:

$$\Sigma (A_\mu + B_\mu i) R_\mu(p, q) = 0,$$

welche Gleichung nur dann bestehen kann, wenn gleichzeitig

$$\Sigma A_\mu R_\mu = 0, \quad \Sigma B_\mu R_\mu = 0$$

ist. Es braucht also nur gezeigt zu werden, dass keine Relation von dieser

*) ϱ ist identisch mit der von *Riemann* durch p bezeichneten Zahl.

Form

$$\Sigma A_\mu J_\mu(x) = A+Bi$$

bestehen darf.

An der Linie L_0 haben alle Grössen J_μ reelle Werthe; daraus folgt, dass $B=0$ sein muss. An einer anderen Linie L_μ aber wird der imaginäre Theil von $J_\mu(x)$ gleich i, während alle übrigen Grössen reelle Werthe haben. Daraus folgt: $A_\mu = 0$. Eine lineare Gleichung zwischen $J_1, J_2, \dots J_{n-1}$ kann daher nicht bestehen.

Nun ist leicht zu sehen, dass das Integral $\int R_\mu(p,q)\,dp$ von der ersten Gattung ist. Denn im Innern von B und auf der Grenze dieses Bereichs wird dasselbe nicht unendlich; ebensowenig aber, da R_μ eine reelle Function von p und q ist, an den entsprechenden Stellen von B'; daher hat dieses Integral an jeder Stelle des Gebildes (p, q) den Charakter einer ganzen Function.

Wir wissen, dass die Zahl ϱ, welche den Rang der Gleichung $\mathfrak{G}(p,q)=0$ angiebt, kleiner oder gleich $n-1$ ist. Da nun $n-1$ linear unabhängige Integrale erster Gattung existiren, so kann ϱ nicht kleiner als $n-1$ sein. Damit ist folgender Satz bewiesen:

VI. ***Die Gleichung*** $\mathfrak{G}(p,q)=0$ ***ist vom Range*** $\varrho = n-1$.

Wir haben bisher unter $H(x)$ und $K(x)$ nur solche Functionen verstanden, die an der Grenze von A nicht unendlich werden. Diese konnten dargestellt werden durch rationale Functionen von p und q mit reellen Coefficienten, oder durch Integrale solcher Ausdrücke. Aber diese rationalen und Integralfunctionen durften nur an imaginären Stellen des Gebildes unendlich werden. Wir geben jetzt diese Beschränkung auf und verstehen unter $K(x)$ irgend eine rationale Function von p und q mit reellen Coefficienten, unter $H(x)$ eine reelle Integralfunction zweiter Gattung. Dann ist erstens klar, dass $H(x)$ und $K(x)$ sich im Innern von A wie rationale Functionen verhalten, zweitens, dass ihre imaginären Theile auf den Grenzlinien constante Werthe haben (bei den Functionen $K(x)$ den Werth Null), drittens dass $H(x)$ nur $n-1$ Perioden besitzen kann, welche sämmtlich reell sind, während $K(x)$ eindeutig ist. Insofern stimmen sie also mit den früher definirten überein. Wenn aber die Function von p und q, durch welche $H(x)$ oder $K(x)$ dargestellt wird, an einer reellen Stelle (p_0, q_0) des Gebildes unendlich wird, so wird auch $H(x)$ an dem entsprechenden Punkte x_0 der Grenze von A unendlich. Es sei wiederum t die zu diesem Punkte

gehörige transformirende Function; dann gehört zu einem kleinen Werthe von t nur eine Stelle (p, q) in der Nähe von (p_0, q_0), und umgekehrt. Daraus folgt, dass $H(x)$, als abhängig von t betrachtet, für $t = 0$ von derselben Ordnung unendlich wird, wie das entsprechende Integral an der Stelle (p_0, q_0).

Es sei jetzt (g, h) irgend ein der Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ genügendes Werthepaar. ξ_α sei diejenige rationale Function, welche nur an dieser Stelle und von der niedrigsten Ordnung α unendlich wird, ξ_β eine solche Function von der nächst höheren Ordnung, u. s. f. Wenn (g, h) im Innern von B liegt, stimmt diese Reihe überein mit denjenigen Functionen, welche wir früher mit $\mathfrak{K}_\alpha$, $\mathfrak{K}_\beta$, $\mathfrak{K}_\gamma$ bezeichnet haben; liegt (g, h) im Innern von B', so entsprechen diese Functionen der Reihe $\bar{\mathfrak{K}}_\alpha$, $\bar{\mathfrak{K}}_\beta$, $\bar{\mathfrak{K}}_\gamma$ etc.; ist dagegen (g, h) ein Punkt der reellen Curve, so sind ξ_α, ξ_β, ξ_γ etc. reelle Functionen von p und q, und, als abhängig von x betrachtet, sind es K-Functionen, die im Innern des Gebietes gar nicht und nur an einer Stelle der Grenze unendlich werden.

Herr ***Weierstrass*** hat gezeigt, dass es immer eine beschränkte Anzahl von Stellen (g, h) giebt, für welche eine Function ξ_α von niedrigerer Ordnung als der $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ existirt.

Wir nehmen an, dass (g, h) eine dieser besonderen Stellen sei. Dann ist $\lambda\xi_\alpha + \mu$ die allgemeinste Function, welche hier von der Ordnung α, $\lambda'\xi_\beta + \mu'\xi_\alpha + \nu'$ die allgemeinste Function, welche von der Ordnung β unendlich wird u. s. f. Wenn man über diese Constanten in bestimmter Weise verfügt, so erhält man ein System von Grössen, das unabhängig von jeder Transformation der Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ definirt ist. Dies hat den Vortheil, dass man zwischen $u = \xi'_\alpha$ und $v = \xi'_{\alpha'}$ eine Gleichung $G(u, v) = 0$ erhält, die nur die nothwendigen wesentlichen Constanten des Gebildes in ihren Coefficienten enthält. Herr ***Weierstrass*** hat die verschiedenen Formen einer solchen Normalgleichung für die Fälle $\varrho = 1$, 2, und 3 angegeben.

Betrachten wir zunächst den Fall $\varrho = 1$, welcher der zweifach zusammenhängenden Fläche entspricht. Es sei (g, h) irgend eine Stelle des Gebildes (p, q); dann existirt kein ξ_1, weil sonst in der Reihe α, β, γ ... keine Zahl fehlen könnte; da aber in derselben auch nur eine Zahl fehlt, so müssen alle übrigen: ξ_2, ξ_3 u. s. w. vorhanden sein. Nach dem, was in §. 3 bewiesen wurde, muss nun jede rationale Function, welche nur an der Stelle (g, h) unendlich wird, sich darstellen lassen in der Form:

$$\xi = G(\xi_2) + \xi_3 G'(\xi_2),$$

wo G und G' ganze Functionen von ξ_2 bedeuten, und ihr Grad ist dadurch bestimmt, dass die Ordnung jedes der beiden Terme G und $\xi_3 G'$ kleiner oder gleich der Ordnung von ξ ist. Daraus folgt:

$$\xi_3^2 = G_3(\xi_2) + G_1'(\xi_2)\xi_3,$$

wo G_3 vom dritten, G_1' vom ersten Grade ist. Wir setzen $v = \xi_3 - \frac{1}{2} G'(\xi_2)$; dann besteht folgende Gleichung

$$v^2 = R(\xi_2),$$

wo R eine ganze Function dritten Grades bezeichnet. Indem man $u = c\xi_2 + c'$ einführt, lässt sich dieser Gleichung folgende Form geben:

$$v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3,$$

und dadurch dass man u und v mit constanten Factoren multiplicirt, sogar erreichen, dass eine dieser noch übrig bleibenden Constanten g_2 und g_3 einen vorgeschriebenen Werth erhält.

Ist $\varrho = 2$, so können wir (g, h) so wählen, dass eine Function ξ_2 existirt. Es ist dann $k_1 = 1$, k_2 muss $= 3$ sein; für jeden anderen Index μ giebt es eine Function ξ_μ. Auch hier lässt sich jede Function, die nur im Punkte (g, h) unendlich wird, darstellen in der Form:

$$\xi = G(\xi_2) + \xi_5 G'(\xi_2);$$

es ist daher auch

$$\xi_5^2 = G(\xi_2) + \xi_5 G'(\xi_2),$$

hier muss G vom fünften, G' vom dritten Grade sein. Diese Gleichung lässt sich ebenso wie die vorige auf die Form

$$v^2 = R(\xi_2)$$

bringen, wo R eine ganze Function fünften Grades ist, in der drei Coefficienten noch willkürliche Werthe erhalten können.

Ist $\varrho = 3$, so können drei Fälle eintreten.

Es kann erstens $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$ sein.

Dann besteht zwischen $v = \xi_7$ und $u = \xi_2$ eine Gleichung $v^2 = R(u)$, die in Bezug auf v quadratisch, in Bezug auf ξ_2 vom siebenten Grade ist und die ebenso erhalten wird, wie die vorige.

Zweitens kann $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ sein. Dann ist jede Function, die nur an der Stelle (g, h) unendlich wird, darstellbar in der Form:

$$\xi = G(\xi_3) + \xi_4 G'(\xi_3) + \xi_4^2 G''(\xi_3),$$

also auch ξ_4^3; wir bekommen also zwischen ξ_3 und ξ_4 die Gleichung:

$$\xi_4^3 + G_1 \xi_4^2 + G_2 \xi_4 + G_3 = 0.$$

Der Coefficient G_1 ist in Bezug auf ξ_3 vom ersten, G_2 vom zweiten, G_3 vom vierten Grade. Ueber fünf von den zehn in dieser Gleichung vorkommenden Constanten kann nach Belieben verfügt werden, da wir ξ_3 durch $\xi_3' = c\xi_3 + c'$, ξ_4 durch $\xi_4' = c_1\xi_4 + c_1'\xi_3 + c_1''$ ersetzen können.

Nun ist noch ein dritter Fall möglich: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 4$. Hier lässt sich jedes ξ darstellen durch die Form:

$$G(\xi_3) + \xi_5 G'(\xi_3) + \xi_7 G''(\xi_3).$$

Demnach lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$(1.)\quad \xi_5^2 = \alpha\,\xi_5 + \beta\,\xi_7 + \gamma,$$
$$(2.)\quad \xi_5\xi_7 = \alpha_1\xi_5 + \beta_1\xi_7 + \gamma_1,$$
$$(3.)\quad \xi_7^2 = \alpha_2\xi_5 + \beta_2\xi_7 + \gamma_2,$$

α, β, γ; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 sind ganze Functionen von ξ_3, und zwar wird ihr Grad durch folgende Zahlen angegeben: 1, 1, 3; 2, 1, 4; 3, 2, 4. Wir können daher ξ_5 durch $\xi_5' = \xi_5 - \beta_1$ ξ_7 durch $\xi_7 - \alpha_1$ ersetzen. Hieraus sehen wir, dass wir α_1 und β_1 gleich Null annehmen können.

Dann ergiebt sich, wenn man (1.) mit ξ_7, (2.) mit ξ_5 multiplicirt:

$$\alpha\gamma_1 + \beta(\alpha_2\xi_5 + \beta_2\xi_7 + \gamma_2) + \gamma\xi_7 = \gamma_1\xi_5.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 = 0; \quad \beta\alpha_2 - \gamma_1 = 0; \quad \beta\beta_2 + \gamma = 0;$$

oder:

$$\gamma = -\beta\beta_2, \quad \gamma_1 = \beta\alpha_2, \quad \gamma_2 = -\alpha\alpha_2.$$

Die Gleichungen haben also folgende Form:

$$\xi_5^2 = \alpha\xi_5 + \beta\xi_7 - \beta\beta_2,$$
$$\xi_5\xi_7 = \beta\alpha_2,$$
$$\xi_7^2 = \alpha_2\xi_5 + \beta_2\xi_7 - \alpha\alpha_2.$$

Daraus ergiebt sich die Gleichung zwischen ξ_3 und ξ_5:

$$\xi_5^3 - \alpha\xi_5^2 + \beta\beta_2\xi_5 - \beta^2\alpha_2 = 0.$$

§. 7.

I. Im vierten Paragraphen wurde gezeigt, dass es möglich ist, unter den Functionen $K(x)$, welche zu dem Gebiete A gehören, zwei besondere

$$p = K_1(x), \quad q = K_2(x)$$

auszuwählen, durch welche alle übrigen Functionen der Gattung K rational

mit reellen Coefficienten ausgedrückt werden können. Wir fanden, dass dann p und q durch eine Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ mit reellen Coefficienten verbunden sind, die vom Range $n-1$ ist, und dass die Curve $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ aus n geschlossenen Theilen besteht.

Wir können p und q auf unendlich viele Arten wählen. Es sei (p_1, q_1) ein zweites Functionenpaar von derselben Beschaffenheit, und $\mathfrak{G}_1(p_1, q_1) = 0$ die Gleichung, welche p_1 und q_1 erfüllen; dann lässt sich p_1 und q_1 rational durch (p, q), aber auch p und q rational durch (p_1, q_1) ausdrücken, und diese Transformationen sind reell in ihren Coefficienten. Wir erhalten so eine unendliche Anzahl von Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Ranges:

$$\mathfrak{G}(s, t) = 0, \quad \mathfrak{G}_1(s, t) = 0, \quad \text{etc.},$$

die für das Gebiet A charakteristisch sind. Aus irgend einer dieser Gleichungen gehen alle übrigen durch rationale, umkehrbare Transformationen mit reellen Coefficienten hervor.

Es sei $\varphi(x)$ irgend eine der Functionen $H(x)$ oder $K(x)$. Diese lässt sich zerlegen in $\varphi_1(\xi, \eta) + i\varphi_2(\xi, \eta)$. Vertauschen wir i mit $-i$, so bekommen wir eine Function $\varphi'(y) = \varphi_1(\xi, \eta) - i\varphi_2(\xi, \eta)$ der Variablen $y = \xi - i\eta$, und es ist klar, dass dem Gebiete A in der Ebene der complexen Grösse y ein congruentes und symmetrisches Gebiet A' entspricht, an dessen Grenzen $\varphi'(y)$ reelle Werthe annimmt. Ersetzen wir in den Ausdrücken $K_1(x)$ und $K_2(x)$ für p und q auf diese Weise i durch $-i$, so sind, da die Coefficienten der Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ reell sind, die neuen Functionen p' und q' durch dieselben Gleichungen verbunden. Daraus folgt:

Zwei Gebiete A und A', deren Form symmetrisch ist, haben dieselben charakteristischen Gleichungen.

Es ist nur folgender Unterschied: Während dem Gebiete A die Hälfte B des algebraischen Gebildes (s, t) entspricht, gehört zu A' die conjugirte Hälfte B'. A und A' bilden zusammen die beiden Seiten einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{A}$; wir können dann sagen, dass jedem Punkte der Fläche $\mathfrak{A}$ ein und nur ein Punkt des algebraischen Gebildes (s, t) entspricht, und zwar der einen Seite A die eine Hälfte des Gebildes, der anderen Seite A' die andere Hälfte, und den beiden gemeinsamen Linien L die reelle Curve $\mathfrak{G}(s, t) = 0$.

II. Jetzt ist es leicht zu zeigen, dass dieselben charakteristischen Gleichungen auch zu jedem anderen Gebiete A_1 gehören, in welches A durch conforme Abbildung verwandelt werden kann.

Denn es sei $x = f(x')$ die abbildende Function. Diese ist eindeutig und rational im Innern des Gebietes A_1. Ersetzen wir daher in $p = K_1(x)$, $q = K_2(x)$ die Variable x durch $f(x')$, so geht p über in $K_1(f(x')) = k_1(x')$, q in $K_2(f(x')) = k_2(x')$. Dann besitzen p und q im Gebiete A_1 den Charakter eindeutiger rationaler Functionen, und nehmen an der Grenze reelle Werthe an. In derselben Weise verwandelt sich jede Function $K(x)$ in eine andere $k(x')$. Da auch das Umgekehrte gilt, so erkennt man sofort:

Alle Functionen $k(x')$ des zweiten Gebiets lassen sich rational durch zwei specielle $k_1(x')$, $k_2(x')$ ausdrücken, die durch die Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ verbunden sind.

Also jede charakteristische Gleichung des Gebietes A ist zugleich eine solche für das transformirte Gebiet A_1. Hieraus und aus dem vorhin bewiesenen Satze folgt sofort:

Wenn zwei Gebiete sich entweder auf einander conform abbilden lassen, oder das eine Gebiet sich auf die symmetrische Ergänzung des anderen abbilden lässt, so gehören ihre charakteristischen Gleichungen zu derselben Klasse und lassen sich durch reelle Substitutionen in einander überführen.

Wenn wir also zwei *geschlossene* ebene Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ auffassen, die sich in einander entweder so abbilden lassen, dass die Seiten A und A_1, A' und A'_1, oder dass A und A'_1, A' und A_1 sich gegenseitig entsprechen, so gehören zu beiden dieselben charakteristischen Gleichungen.

III. Es seien $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ und $\mathfrak{G}_1(s', t') = 0$ zwei charakteristische Gleichungen der geschlossenen ebenen Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$. Damit dieselben sich conform in einander abbilden lassen, ist alsdann erforderlich und hinreichend: erstens, dass $\mathfrak{G} = 0$, $\mathfrak{G}_1 = 0$ derselben Klasse algebraischer Gleichungen angehören; zweitens, dass sich die Gleichung $\mathfrak{G} = 0$ durch eine reelle Substitution in $\mathfrak{G}_1 = 0$ überführen lasse.

Denn es seien $p = K_1(x)$, $q = K_2(x)$ diejenigen zu dem Gebiete A gehörigen Functionen, welche durch die Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ verbunden sind; ebenso $p' = K_3(x)$, $q' = K_4(x)$ die Functionen des Gebietes A_1, welche der Gleichung $\mathfrak{G}_1(p', q') = 0$ genügen. Dann lässt sich, der Voraussetzung zufolge, mindestens ein Paar rationaler Functionen von p' und q' mit reellen Coefficienten angeben:

$$p_1 = R_1(p', q'), \quad q_1 = R_2(p', q'),$$

durch welche sich umgekehrt (p', q') rational ausdrücken lassen und welche

dieselbe Gleichung $\mathfrak{G} = 0$ erfüllen wie die Grössen p und q. Diese neuen Functionen von x' bezeichnen wir mit $K_5(x')$ und $K_6(x')$.

Nun wird, wenn wir

$$s = K_1(x), \quad t = K_2(x)$$

setzen, das Gebiet A mit der einen Hälfte B des durch die Gleichung $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ definirten Gebildes in eindeutige Beziehung gesetzt. Ebenso, wenn wir

$$s = K_5(x'), \quad t = K_6(x')$$

setzen, wird das Gebiet A_1 mit der einen Hälfte dieses Gebildes in Correlation gesetzt. Dies kann entweder B oder B' sein. Im ersten Falle können wir setzen:

$$K_1(x) = K_5(x'), \quad K_2(x) = K_6(x'),$$

und es ist durch diese Gleichungen zwischen x und x' eine Beziehung hergestellt von der Art, dass jedem Punkte im Innern oder auf der Grenze des einen Gebietes nur ein Punkt im Innern oder auf der Grenze des andern entspricht. Entspricht aber dem Bereiche A_1 die andere Hälfte B' des Gebildes, so bilden wir die zu $K_5(x')$ und $K_6(x')$ conjugirten Functionen und setzen diese gleich s und t. Dadurch wird die symmetrische Ergänzung von A_1 eindeutig auf B bezogen:

$$\bar{K}_5(y') = s, \quad \bar{K}_6(y') = t.$$

Setzt man nun $s = K_1(x)$, $t = K_2(x)$, so entspricht jedem Punkte der Fläche A_1' ein und nur ein dem Theile B des Gebildes (s, t) angehöriges Werthepaar, jedem solchen Werthepaar aber ein und nur ein Punkt der Fläche A. In diesem Falle entsprechen sich also A und A_1', A' und A_1, und es ist, um die Fläche $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_1$ überzuführen, ausser der Transformation $x = f(x')$ noch eine Drehung der einen Fläche im Raume nothwendig.

Die Forderung, dass die charakteristischen Gleichungen für beide Flächen dieselben sein sollen, ist, da die allgemeinste algebraische Gleichung vom Range ϱ $3\varrho - 3$ wesentliche Constanten enthält, gleichbedeutend mit $3\varrho - 3$ Relationen zwischen den Parametern der beiden Flächen. Aber die Forderung, dass A_1 auch A entspreche und nicht dem ergänzenden Bereiche A_1', lässt sich in der Form einer Gleichung nicht geben.

Wir können sie so aufstellen: Es sei $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ irgend eine den Flächen A und A' gemeinsame charakteristische Gleichung, (s_1, t_1) sei ein Werthepaar, das irgend einem Punkte x_0 im Innern von A, (s_2, t_2) ein Werthepaar, das einem im Innern von A_1 gelegenen Punkte x_0' entspricht;

dann entsprechen sich A und A_1, A' und A'_1, wenn man von (s_1, t_1) nach (s_2, t_2) gelangen kann, ohne die reelle Linie zu überschreiten, dagegen A und A'_1, A_1 und A', wenn dies nicht möglich ist.

Wenn es mehrere rationale umkehrbare Transformationen der Gleichung $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ in $\mathfrak{G}_1(s', t') = 0$ giebt, so lassen sich mehrere Functionenpaare $K_5(x')$, $K_6(x')$ aufstellen, die durch dieselbe Gleichung verbunden sind wie $K_1(x)$ und $K_2(x)$; es giebt also ebensoviel verschiedene Arten die Fläche $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$ abzubilden, als es verschiedene reelle Transformationen der einen Gleichung in die andere giebt.

Ist ferner $\mathfrak{G} = 0$ auf mehr als eine Weise reell in $\mathfrak{G}_1 = 0$ transformirbar, so muss die Gleichung $\mathfrak{G} = 0$ reell in sich selbst transformirbar sein. Die Fläche $\mathfrak{A}$ besitzt dann die Eigenschaft, dass sie sich in sich selbst abbilden lässt.

V. Ist $\mathfrak{A}$ eine einfach zusammenhängende Fläche, so sind alle charakteristischen Gleichungen vom Range 0; ist daher $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ eine derselben, so lässt sich eine rationale Function von s und t mit reellen Coefficienten: $z = R(s, t)$ angeben, durch welche sowohl s als auch t rational ausgedrückt werden kann:

$$s = f(z), \quad t = g(z).$$

Setzen wir nun

$$s' = f\left(\frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}\right), \quad t' = g\left(\frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}\right),$$

wo α, β, γ, δ reelle Coefficienten bedeuten, so lassen sich s' und t' rational und reell durch s und t ausdrücken, und umgekehrt; ferner sind s' und t' durch dieselbe Gleichung $\mathfrak{G}(s', t') = 0$ verbunden. Zugleich erkennt man, dass man auf diese Weise die allgemeinste reelle Transformation der Gleichung $\mathfrak{G} = 0$ in sich selbst erhält. Und zwar geht B wieder in B, B' in B' über, wenn $\beta\gamma - \alpha\delta > 0$, dagegen B in B', B' in B, wenn $\beta\gamma - \alpha\delta < 0$ ist. Die Gleichungen vom Range 0 gehören alle in dieselbe Klasse; daher ist die Lösung des Abbildungsproblems in diesem Falle immer möglich und enthält drei reelle unbestimmte Constanten.

Ist $n = 2$, so ist jede charakteristische Gleichung $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ vom Range 1; es lassen sich also s und t als elliptische Functionen einer Grösse u auffassen:

$$s = \varphi(u), \quad t = \psi(u).$$

Dieselbe Gleichung besteht aber auch zwischen

$$s' = \varphi(\alpha u + \beta), \quad t' = \psi(\alpha u + \beta).$$

Damit sich s' und t' rational durch s und t, und umgekehrt s, t rational durch (s', t') ausdrücken lässt, muss $\alpha = \pm 1$, und damit die Transformation eine reelle sei, entweder β reell, oder β gleich einer reellen Grösse $+\omega'$ sein, wo ω' die halbe imaginäre Periode bedeutet. Wir erhalten also folgende Transformationen der Gleichung $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ in sich selbst:

$$s = \varphi(u), \quad t = \psi(u)$$

$$s' = \varphi(\pm u + c), \quad t' = \psi(\pm u + c)$$

oder

$$s' = \varphi(\pm u + \omega' + c), \quad t' = \psi(\pm u + \omega' + c).$$

Soll bei dieser Transformation B in B, B' in B' übergehen, so muss im ersten Falle das Vorzeichen positiv, im zweiten negativ genommen werden. Wir sehen also, dass die zweifach zusammenhängende Fläche A sowohl in sich selbst, als auch in ihre symmetrische Ergänzung verwandelt werden kann, und zwar können wir diese Abbildung zu einer völlig bestimmten machen, wenn wir einem gegebenen Punkte der Begrenzung einen anderen willkürlich zuordnen. Daher gilt der Satz:

Zwei doppelt zusammenhängende Gebiete A und A' lassen sich conform in einander abbilden, wenn die Invariante der charakteristischen Gleichungen in beiden Fällen denselben Werth hat; und zwar auf unendlich viele Arten; die Abbildung wird eine völlig bestimmte, wenn wir zwei willkürlich gewählte Punkte der Grenze von A und A' einander zuordnen.

Ist $\varrho > 1$, so giebt es im Allgemeinen keine Transformation der Gleichung $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ in sich selbst, sondern dies tritt nur in besonderen Fällen ein und die Anzahl dieser Transformationen ist dann eine endliche. Ist $\varrho = 2$, so lässt die Gleichung $\mathfrak{G}(s, t) = 0$ noch eine reelle Transformation zu, nämlich, wenn wir die Normalform

$$t^2 = 4s^5 - g_2 s^3 - g_3 s^2 - g_4 s - g_5$$

nehmen, die Transformation $s' = s$, $t' = -t$. Durch diese wird aber B in B', B' in B verwandelt. Obwohl deshalb die ganze Fläche $\mathfrak{A}$ eine conforme Abbildung in sich selbst erlaubt, so ist es doch nicht möglich A in sich selbst, sondern nur A in seine symmetrische Ergänzung A' abzubilden.

§. 8.

Wir wollen nun für einige besondere Gebiete untersuchen, welches die zu ihnen gehörigen Functionen $F(x)$, $H(x)$, $K(x)$ sind, und wie sich diese Flächen in andere abbilden lassen.

I. Wir betrachten zuerst ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, das von zwei Kreisen begrenzt ist, einem umschliessenden L_0 und einem von dem Gebiet umschlossenen L_1. Es ist dann bekannt, dass es zwei Punkte P und Q in der Ebene giebt, die in solcher Beziehung zu den beiden Kreisen stehen, dass das Verhältniss der Strecken $\frac{RP}{RQ}$ ein constantes ist, sowohl wenn der Punkt R den einen, als wenn er den anderen Kreis durchläuft. Es seien g und h die beiden Werthe dieses Verhältnisses, und es sei $x=a$ im Punkte P, $x=b$ im Punkte Q; dann ist der absolute Betrag von $\frac{x-a}{x-b}=g$ auf der Linie L_0, $=h$ auf der Linie L_1. Wir erhalten also alle Punkte der ersten Linie, wenn wir $\frac{x-a}{x-b}=ge^{i\varphi}$ setzen und der Grösse φ alle reellen Werthe von 0 bis 2π geben; ebenso alle Punkte der zweiten, wenn wir $\frac{x-a}{x-b}=he^{i\varphi}$ setzen und ebenfalls φ von 0 bis 2π wachsen lassen.

Setzen wir $\log\frac{x-a}{x-b}=iF(x)$, so ist $F(x)=\varphi-i\log g$ auf der Linie L_0, $F(x)=\varphi-i\log h$ auf der Linie L_1. Der imaginäre Theil von $F(x)$ hat also auf beiden Linien constante Werthe, und zwar auf L_0 den Werth $-i\log g$, auf L_1 den Werth $-i\log h$. Da die beiden Punkte $x=a$ und $x=b$ ausserhalb des von diesen Linien umschlossenen Ringes liegen, so hat ausserdem $F(x)$ an jeder Stelle des Gebietes und auf den Grenzen desselben den Charakter einer ganzen Function; daraus folgt, dass $F(x)$ eine solche Function ist, wie wir sie in §. 6. mit $J(x)$ bezeichnet haben.

Setzen wir jetzt $-i\log\frac{x-a}{x-b}+i\log g=u$ und bezeichnen die rein imaginäre Grösse $i(\log(g)-\log(h))$ mit ω'; dann ist auf der Linie L_0 u reell, auf L_1 ist $u-\omega'$ reell. Betrachten wir jetzt die Functionen $K(x)$. Da x eine eindeutige Function von u ist und sich im Innern von A nicht ändert, wenn u sich auf einer geschlossenen Linie um 2π vermehrt, so ist erstens klar, dass $K(x)$, als abhängig von u betrachtet, für alle Werthe dieser Grösse, deren imaginärer Theil zwischen Null und ω' liegt, den Charakter einer rationalen Function besitzen muss, und dass sich $K(x)=f(u)$ nicht ändern darf, wenn u um 2π vermehrt wird. Ferner muss für reelle Werthe von u sowohl $f(u)$ als $f(u-\omega')$ reell sein. Da nun ω' rein imaginär ist, so folgt daraus:

$$f(u-\omega')=f(u+\omega') \quad \text{oder} \quad f(u+2\omega')=f(u),$$

$f(u)$ ist also eine doppelt periodische Function, die im Innern eines Periodenparallelogramms den Charakter einer rationalen Function besitzt. Eigentlich ist durch die Punkte $u = 0$, $u = 2\pi$, $u = \omega'$, $u = \omega' + 2\pi$ nur die Hälfte eines Periodenparallelogramms bestimmt; aber da $f(u)$ eine reelle Function von u sein soll, so setzt sie sich über die reelle Linie hinaus symmetrisch fort; woraus folgt, dass sie in der anderen Hälfte ebenfalls einen rationalen Charakter hat.

Die Functionen $K(x)$ können wir daher definiren als reelle elliptische Functionen von u mit den Perioden 2π und $2\omega'$. Dass sich diese rational durch zwei bestimmte $\wp(u)$ und $\wp'(u) = \sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$ ausdrücken lassen, ist aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt.

Setzen wir $x' = \frac{1}{g}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)$, so wird dadurch die Fläche A in eine von zwei um den Mittelpunkt gezogenen concentrischen Kreisen begrenzte Fläche verwandelt. Der eine dieser Kreise, L_0, hat den Radius Eins, der andere, L_1, den Radius $\frac{h}{g} = e^{-i\omega'}$. Dieser Radius ist aber ein bestimmter, denn er ist von dem Parameter $\frac{\omega'}{\pi}$ der elliptischen Functionen abhängig. Wir können daher jede zweifach zusammenhängende Fläche in eine von zwei concentrischen Kreisen begrenzte verwandeln, und auch bestimmen, dass der grössere den Radius Eins haben soll; der Radius des kleineren hat aber dann einen bestimmten, nicht willkürlich anzunehmenden Werth.

Untersuchen wir jetzt, welche Transformationen in sich selbst diese Ringfläche, die jedenfalls von allen doppelt zusammenhängenden die einfachste Form besitzt, zulässt. Es sind folgende Transformationen von u erlaubt

$$u' = u + \alpha,$$
$$u' = \omega' - u + \alpha,$$

wo α eine beliebige reelle Grösse bedeutet. Diesen entsprechen die Transformationen von x':

$$x'' = x' e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad x'' = \frac{h}{g} \cdot \frac{e^{i\alpha}}{x'}.$$

Die erste derselben ist eine reine Drehung; durch die zweite geht L_0 in L_1, L_1 in L_0 über.

II. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, einen Bereich, der von zwei confocalen Ellipsen begrenzt ist, in einen von zwei concentrischen Kreisen

begrenzten zu verwandeln. Die Gleichungen dieser Ellipsen seien

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1,\quad \frac{\xi^2}{a_1^2}+\frac{\eta^2}{b_1^2}=1.$$

Damit dieselben confocal seien, muss die Bedingung stattfinden:

$$a^2-b^2=a_1^2-b_1^2.$$

Wir können für die Punkte der ersten Ellipse setzen:

$$\xi=a\cos\varphi,\quad \eta=b\sin\varphi.$$

Daraus folgt:

$$x=\xi+i\eta=a\cos\varphi+ib\sin\varphi.$$

Es sei a die grössere Halbaxe, und ϱ gleich der positiven Grösse $\sqrt{a^2-b^2}$. Dann können wir setzen:

$$a=\varrho\cos i\alpha,\quad b=\varrho\frac{\sin i\alpha}{i}.$$

Es ist dann

$$e^{\alpha}=\frac{a+b}{\varrho}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}},$$

also α eine positive Grösse. Wir bekommen dann:

$$x=\varrho\cos(\varphi-i\alpha).$$

Daraus sehen wir, dass $\arccos\left(\frac{x}{\varrho}\right)+i\alpha$ eine auf der Linie L_0 reelle Function ist.

Da $\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{a^2-b^2}=\varrho$ ist, können wir ebenso für alle Punkte der zweiten Linie setzen:

$$x=\xi+i\eta=\varrho\cos(\varphi-i\alpha_1),$$

wo

$$e^{\alpha_1}=\frac{a_1+b_1}{\varrho}=\sqrt{\frac{a_1+b_1}{a_1-b_1}}$$

ist. Daher nimmt $\arccos\left(\frac{x}{\varrho}\right)+i\alpha_1$ auf der Linie L_1 reelle Werthe an. Folglich ist

$$u=\arccos\left(\frac{x}{\varrho}\right)+i\alpha$$

eine Function, die auf der Linie L_0 reell ist, auf der Grenze L_1 dagegen sich von einer reellen Function nur um die Grösse $i(\alpha_1-\alpha)$ unterscheidet. Unstetig wird dieselbe nur für $x=\pm\varrho$, d. h. für die Brennpunkte der beiden

Ellipsen, die im Innern der Linie L_1 liegen. Sie hat daher für alle Punkte des Bereichs den Charakter einer ganzen Function, und ändert sich auf einem geschlossenen Wege, der die Linie L_1 umgiebt, um die Periode 2π. u ist also wiederum eine Function $J(x)$.

Um daher den Bereich in einen von zwei concentrischen Kreisen begrenzten abzubilden, haben wir nur $J(x)$ der entsprechenden Function für diese zweite Figur gleichzusetzen. Die Gleichung des grösseren Kreises L_0' sei $\xi'^2+\eta'^2=r^2$, die des kleineren L_1': $\xi'^2+\eta'^2=r_1^2$; dann ist $u'=-i\log(x')+i\log r$ auf dem grösseren Kreise reell, auf dem kleineren unterscheidet sie sich von einer reellen Function um die Grösse $i\log(r_1)-i\log r$, und bei dem Umgange um L_1 ändert sie sich um 2π. Damit also die Abbildung möglich ist, muss

$$i(\alpha_1-\alpha) = i\log r_1-i\log r$$

sein, und dann wird die Art der Abbildung angegeben durch die Formel

$$\arccos\left(\frac{x}{\varrho}\right)+i\alpha = -i\log(x')+i\log r,$$

α ist gleich $\log\left(\frac{a+b}{\varrho}\right)$, α_1 gleich $\log\left(\frac{a_1+b_1}{\varrho}\right)$ und $\arccos\left(\frac{x}{\varrho}\right)$ gleich $-i\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-\varrho^2}}{\varrho}\right)$; wir bekommen also folgende Formeln:

$$-i\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}}{\varrho}\right)+i\log\left(\frac{a+b}{\varrho}\right) = i\log(x')+i\log(r),$$

$$i\log\left(\frac{a+b}{\varrho}\right)-i\log\left(\frac{a_1+b_1}{\varrho}\right) = i\log(r)-i\log(r_1),$$

oder, indem wir von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}}{a+b} = \frac{x'}{r},$$

$$\frac{a_1+b_1}{a+b} = \frac{r_1}{r}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel muss so gewählt werden, dass $\sqrt{x^2+b^2-a^2}$ für $x=a$ in b übergeht; dann entsprechen sich die Punkte $x=a$ und $x'=r$. — Wir haben also den Satz:

Damit ein von zwei confocalen Ellipsen begrenzter Bereich in einen von zwei concentrischen Kreisen begrenzten sich abbilden lasse, ist nothwendig und hinreichend, dass die Radien dieser Kreise sich verhalten wie die Summen der Axen der beiden Ellipsen.

Will man umgekehrt x durch x' ausdrücken, so erhält man:

$$x = \frac{a+b}{2}\frac{x'}{r}+\frac{a-b}{2}\frac{r}{x'}.$$

III. Wir haben zwar bei der Herleitung der allgemeinen Sätze angenommen, dass das Gebiet A von endlichem Flächeninhalt sei und dass es von einer L_0 von endlicher Länge umschlossen sei. Aber die gefundenen Sätze gelten auch, wenn das Gebiet sich ins Unendliche erstreckt; man kann einen solchen Fall stets durch eine einfache Transformation auf den früheren zurückführen. Wenn eine der Linien L sich bis ins Unendliche erstreckt, so sagen wir, dass der unendlich ferne Punkt der Ebene auf der Grenze von A liegt; wenn das Gebiet sich ins Unendliche erstreckt, die Linien L aber alle im Endlichen liegen, so sagen wir, dass der unendlich ferne Punkt im Innern des Gebietes liegt. Um dann die Functionen $F(x)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes zu entwickeln, setzen wir $\frac{1}{x} = t$; wir sagen dann, dass $F(x)$ an dem unendlich fernen Punkte den Charakter einer ganzen Function besitzt, wenn sie nach ganzen positiven Potenzen von t entwickelbar ist, und dass sie von der μ^{ten} Ordnung unendlich wird, wenn negative Potenzen von t bis zur μ^{ten} in der Entwicklung vorkommen. Auch hindert nichts, dass wir statt ganzer Linien, Strecken von Linien als Begrenzung annehmen; denn insofern eine solche Strecke zwei Seiten hat, ist sie auch eine geschlossene Linie.

Wir nehmen nun für das Gebiet A die ganze Ebene mit Ausschluss einzelner endlicher geradliniger Strecken $L_0, L_1, \dots L_{n-1}$, die wir der reellen Linie parallel annehmen. Die Entfernung dieser Linie von L_0 sei a_0, von L_1: a_1, u. s. f., endlich von L_{n-1}: a_{n-1}.

Es seien nun p, q irgend zwei K-Functionen, die durch eine Gleichung $\mathfrak{G}(p,q) = 0$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Range verbunden sind, und durch die sich alle übrigen rational ausdrücken lassen; (p_0, q_0) seien die Werthe, welche diese Functionen für $x = \infty$ annehmen. Fassen wir nun die zu diesem Gebiete gehörigen Functionen $F(x)$ auf, so ist leicht zu erkennen, dass x selbst zu ihnen gehören muss. Denn der imaginäre Theil von x nimmt auf jeder der Linien L einen constanten Werth an; ausserdem aber hat x an jeder Stelle des Gebietes natürlich den Charakter einer ganzen Function mit Ausnahme des Punktes $x = \infty$, an welchem x von der ersten Ordnung unendlich wird. Betrachten wir daher x als Function von p und q, so ist es ein Integral zweiter Gattung, dessen imaginäre Perioden $2(a_1 - a_0)$,

$2(a_2-a_0)$, ... $2(a_{n-1}-a_0)$ sind, und dessen reelle Perioden sämmtlich den Werth Null haben. Dasselbe ist an jeder Stelle von B endlich, mit Ausnahme der Stelle (p_0, q_0), wo x von der ersten Ordnung unendlich wird. Da $x-a_0$ ausserdem eine reelle Function von p und q ist, so wird x nur noch an der zu (p_0, q_0) conjugirten Stelle (p_0', q_0') in B' unendlich. Wir haben also aus p und q ein Integral zweiter Gattung zu bilden, welches sich in der Nähe der Stelle (p_0, q_0) in folgender Weise entwickeln lässt:

$$H(p,q) = \frac{A+Bi}{p-p_0} + \mathfrak{P}(p-p_0)$$

und in der Nähe des Punktes (p_0', q_0') die entsprechende Entwicklung hat:

$$H(p,q) = \frac{A-Bi}{p-p_0'} + \mathfrak{P}'(p-p_0').$$

Ausserdem haben wir $H(p,q)$ so zu bestimmen, dass die sämmtlichen $n-1$ reellen Perioden verschwinden; hierdurch ist aber $H(p,q)$ bis auf einen constanten Factor und eine additive Constante völlig definirt.

Es ist noch etwas zu beachten. Die Gestalt der Fläche A hängt von $3n$ Constanten ab; von diesen lassen sich durch eine lineare Transformation $x' = ax+b+ci$ drei willkürlich bestimmen; es bleiben also $3n-3 = 3\varrho$ wesentliche Parameter. $H(p,q)$ enthält erstens das imaginäre Werthepaar (p_0, q_0), welches für zwei Constanten zu rechnen ist; ausserdem die beiden Grössen A und B, von denen wir aber die eine gleich Eins annehmen können. Die Gleichung $\mathfrak{G}(p,q)=0$ selbst muss also $3n-6=3\varrho-3$ wesentliche Constanten enthalten, d. h. die höchste Zahl, die eine Gleichung vom Range ϱ besitzen kann. Daraus geht hervor, dass sich jede Fläche in eine von lauter geradlinigen parallelen Strecken begrenzte abbilden lässt.

Nimmt man an, dass die Strecken $L_0, L_1, \dots L_{n-1}$ sämmtlich Theile der reellen Linie sind, so ist $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$, daher $H(p,q)$ eine eindeutige Function von u. Daraus folgt, dass sich in diesem Falle x rational durch p und q ausdrücken lassen muss. Rationale Functionen vom zweiten Grade giebt es aber nur, wenn die Gleichung $\mathfrak{G}(p,q)=0$ auf die der hyperelliptischen zurück geführt werden kann. Wir dürfen also setzen

$$p = x, \quad q^2 = c(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_{2n}).$$

Es ist leicht zu erkennen, dass die Werthe der Constanten $c_1, c_2, \dots c_{2n}$ keine anderen sein können als die des x an den Endpunkten der Strecken L.

§. 9.

Es sei $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ eine Gleichung vom Range ϱ mit reellen Coefficienten und von der Beschaffenheit, dass die reelle Curve $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ aus $\varrho+1$ geschlossenen Linien besteht. Dann zerfällt durch diese Curve das algebraische Gebilde (p, q) in zwei conjugirte Hälften B und B'. Ferner sei A ein $(\varrho+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet der Ebene einer complexen Grösse x, zu welchem $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ als eine der charakteristischen Gleichungen gehört; dann ist es möglich, zwei durch die Gleichung $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ verbundene Functionen

$$(1.) \qquad p = K_1(x), \quad q = K_2(x)$$

zu bilden, durch welche das Gebiet A und die Hälfte B des Gebildes in der Weise in Beziehung gebracht werden, dass jedem Punkte x_0 im Innern oder auf der Grenze von A eine und nur eine Stelle (p_0, q_0) im Innern oder auf der Grenze von B entspricht, und umgekehrt.

Durch Umkehrung der Gleichungen (1.) lässt sich x für alle Punkte des Gebildes, die im Innern oder auf der Grenze von B liegen, als eindeutige Function von p und q darstellen: $x = f(p, q)$. Diese Grösse nimmt im Innern von B keinen Werth mehr als einmal an; wenn daher $x = a$ oder $x = \infty$ wird, so verschwindet $x - a$ oder $\frac{1}{x}$ nur von der ersten Ordnung. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, diese Grösse durch Differentialgleichungen zu bestimmen für den Fall, dass die geschlossenen Linien, welche den Rand der Fläche bilden, ganz aus Theilen von Kreisen und geraden Linien zusammengesetzt sind. Es wird sich zeigen, dass dann x der Quotient zweier particulären Integrale einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^2 y}{dp^2} + R_1(p, q)\frac{dy}{dp} + R_2(p, q)y = 0$$

ist. Da über die Gestalt der Fläche A nur eine sehr allgemeine Voraussetzung getroffen ist, so wird auch die Klasse der linearen Differentialgleichungen, welche wir auf diese Weise erhalten, eine sehr ausgedehnte sein.

Wir nehmen also an, dass die Linien, welche die Begrenzung von A bilden, Kreispolygone seien. Die Eckpunkte dieser Polygone nennen wir die singulären Punkte der Grenze.

Es sei zuerst x_0 ein nicht singulärer Punkt der Grenze. Dann setzen wir

$$\frac{x - x_0}{ax + b} = t$$

und bestimmen die beiden Constanten a und b so, dass t ausser im Punkte

x_0 noch an zwei anderen Punkten desselben Kreises, auf welchem x_0 liegt, reelle Werthe annimmt. Durch diese Gleichung wird die Fläche A auf die Ebene t conform abgebildet, und zwar so, dass dem Kreise, auf welchem x_0 liegt, die reelle Gerade, dem Punkte x_0 selbst der Nullpunkt entspricht. Daraus folgt, dass wir t als die zu diesem Punkte der Grenze gehörige transformirende Function wählen können.

Es sei zweitens x_0 einer der singulären Punkte. Dann treffen hier zwei benachbarte Strecken zusammen unter einem Winkel, den wir mit $\lambda\pi$ bezeichnen wollen (es ist dann λ eine positive Grösse zwischen den Grenzen 0 und 2). Setzen wir

$$\frac{ax+b}{x-x_0} = x',$$

so entspricht dem Punkte x_0 der unendlich ferne Punkt in der Ebene x'; die beiden Kreise, welche hier zusammentreffen, müssen sich also in gerade Linien verwandeln. Ist λ weder $=0$, noch $=1$, noch $=2$, so schneiden sich diese beiden Geraden unter dem Winkel $\lambda\pi$, und wir können a und b so bestimmen, dass der Durchschnittspunkt der Nullpunkt in der Ebene x', eine der beiden Geraden die reelle Linie wird; die andere bildet dann mit dieser den Winkel $\lambda\pi$. Setzen wir nun $x' = t^{-\lambda}$, so entspricht dem Punkte $x' = \infty$ der Nullpunkt $t=0$, die beiden Geraden gehen in den positiven und negativen Theil der reellen Linie über. Die zu x_0 gehörige transformirende Function t wird also durch die Formel:

$$x' = \frac{ax+b}{x-x_0} = t^{-\lambda}$$

gegeben. Ist dagegen $\lambda = 0$, 1 oder 2, so gehen die beiden Strecken über in zwei parallele Gerade, und der unendlich ferne Punkt, in dem sie sich berühren, ist der dem Punkte x_0 entsprechende. Da es, wenn man die transformirende Function finden will, nur auf die Gestalt der Fläche in der Nähe des betrachteten Punktes ankommt, so können wir, um t zu bilden, eine Fläche annehmen, die nur von diesen beiden Linien begrenzt ist. Ist $\lambda = 0$, so können wir voraussetzen, dass sie nach beiden Richtungen ins Unendliche fortgehe; dann finden wir

$$x' = \frac{ax+b}{x-x_0} = c\log(t),$$

wo c eine reelle Constante bedeuten soll. Ist $\lambda = 1$, so muss eine der Geraden an einem Punkte aufhören; man erhält dann:

$$x' = \frac{ax+b}{x-x_0} = c\log(t) + t^{-1}.$$

Ist $\lambda = 2$, so dürfen beide Geraden nur nach einer Richtung ins Unendliche fortgehen. Nehmen wir die Endpunkte an als senkrecht zu der Richtung der Parallelen übereinanderliegend, so ergiebt sich hier:

$$x' = \frac{ax+b}{x-x_0} = c\log(t) + t^{-2}.$$

Die Constante c kann in allen drei Fällen $= 1$ angenommen werden, wenn sie nicht Null ist; was eintritt, wenn die Entfernung der beiden Parallelen gleich Null ist.

Nun ist es aber noch auf eine andere Weise möglich, für jeden Punkt x_0 der Grenze eine transformirende Function zu erhalten. Es sei (p_0, q_0) die dem Punkte x_0 entsprechende Stelle auf der reellen Curve des Gebildes; dann bilden wir eine rationale Function τ von p und q mit reellen Coefficienten, die an der Stelle (p_0, q_0) von der ersten Ordnung verschwindet. Zu jedem unendlich kleinen Werthe von τ gehört dann ein bestimmtes Werthepaar (p, q) in der Nähe von (p_0, q_0), welches reell ist, wenn τ reell ist; und umgekehrt.

Hieraus folgt, dass durch die Function τ derjenige Theil der Fläche A, welcher in der Nähe des Punktes x_0 liegt, conform abgebildet wird, und zwar so, dass $\tau = 0$ dem Punkte x_0 entspricht, und der Strecke, auf welcher x_0 liegt, die reelle Gerade. — Nun gehört zu jedem unendlich kleinen Werthe von τ ein und nur ein unendlich kleiner Werth von t, und umgekehrt; daraus folgt, dass t sich in dieser Weise entwickeln lässt:

$$t = \alpha\tau + \beta\tau^2 + \gamma\tau^3 + \text{etc.},$$

wo α von Null verschieden ist. Da zu einem reellen τ auch ein reeller Werth von t gehört, so müssen die Coefficienten α, β, γ etc. reelle Grössen sein.

§. 10.

Wir können jetzt den analytischen Charakter der Function $x = f(p, q)$, zunächst für die eine Hälfte B des Gebildes, dann aber auch für das ganze Gebilde, vollständig bestimmen. Um eine Function F von p und q in der Nähe irgend eines Punktes (p_0, q_0) darzustellen, ist es zunächst nöthig eine rationale Function τ von p und q zu bilden, welche in diesem Punkte von der ersten Ordnung verschwindet. Eine solche ist im Allgemeinen $p - p_0$; es giebt aber Stellen, in denen $p - p_0$ von einer höheren Ordnung verschwindet; für diese und für die unendlich fernen Punkte des Gebildes muss für τ eine andere rationale Function gewählt werden. p und q lassen

sich dann nach aufsteigenden ganzen Potenzen von τ entwickeln, und diese Reihen hat man in den Ausdruck $F(p, q)$ einzusetzen, um eine Darstellung zu erhalten, welche für alle Punkte des Gebildes in der Umgebung von (p_0, q_0) gültig ist. Wir setzen ausserdem voraus, dass τ, wenn die Stelle (p_0, q_0) auf der reellen Curve des Gebildes liegt, eine reelle Function von p und q ist.

Nehmen wir zunächst an, dass (p_0, q_0) ein Punkt im Innern von B ist, so giebt es eine lineare Function x' von x, welche an dieser Stelle von der ersten Ordnung verschwindet. Diese muss also darstellbar sein in der Form:

$$x' = c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \text{etc.},$$

wo c_1 von Null verschieden ist.

Dasselbe gilt, wenn (p_0, q_0) eine solche Stelle auf der Grenze von B, also auf der reellen Curve, ist, der ein nicht singulärer Punkt auf der Grenze von A entspricht. Dann nehmen wir $x' = t$, und es sind dann, wie wir gesehen haben, die sämmtlichen Coefficienten c_1, c_2, c_3 etc. reelle Grössen.

Entspricht der Stelle (p_0, q_0) ein singulärer Punkt der Begrenzung, so geht durch Einsetzung von τ die Formel

$$x' = c\log(t) + t^{-\lambda}$$

über in

$$x' = c\log(\tau) + c_1\tau^{-\lambda} + c_2\tau^{-\lambda+1} + c_3\tau^{-\lambda+2} + \text{etc.},$$

wo wiederum c_1 von Null verschieden ist, und c, c_1, c_2 etc. reelle Grössen bedeuten. c muss von Null verschieden sein, wenn $\lambda = 0$ ist; es kann einen von Null verschiedenen Werth haben, wenn $\lambda = 2$ ist; in allen übrigen Fällen aber ist $c = 0$.

Diese Formel geht in die für nicht singuläre Punkte geltende über, wenn wir $c = 0$ und $\lambda = -1$ setzen.

Fassen wir irgend eine Strecke s der reellen Curve des Gebildes ins Auge, auf der kein singulärer Punkt liegt; dann giebt es eine lineare Function $t = \frac{x - x_0}{ax + b}$, welche an jedem Punkte derselben einen reellen Werth hat. Hierdurch wird klar, wie die Function x über diese Strecke hinaus in die zweite Hälfte B' des Gebildes fortgesetzt werden muss; nämlich so, dass t an jedem Punkte p_0', q_0' von B' den conjugirten Werth erhält zu demjenigen, welchen t an dem entsprechenden Punkte (p_0, q_0) von B hat.

Es seien jetzt s_1, s_2 zwei Strecken, die entweder auf zwei von einander getrennten Zweigen der reellen Curve liegen, oder einem Zweige derselben angehören, aber durch einen oder mehrere singuläre Punkte von einander getrennt sind. Dann sind die entsprechenden Linien der Fläche zwei Kreisbogen, die im Allgemeinen verschiedenen Kreisen angehören. Es giebt also zwei lineare Functionen von $x: t_1 = \frac{x-x_0}{ax+b}$, $t_2 = \frac{x-x'_0}{a'x+b'}$, von denen die erste auf s_1, die zweite auf s_2 reelle Werthe annimmt; und wenn wir t_1 durch t_2 ausdrücken: $t_1 = \frac{\alpha t_2+\beta}{\gamma t_2+\delta}$, so sind im Allgemeinen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe Grössen. Bewegt man sich im Innern von B von s_1 nach s_2, so verwandelt sich t_1 in $\frac{\alpha t_2+\beta}{\gamma t_2+\delta}$, wo t_2 eine reelle Grösse bedeutet. Auf dem entsprechenden Wege in B' geht daher t_1 in $\frac{\alpha' t_2+\beta'}{\gamma' t_2+\delta'}$ über, wo $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ conjugirten complexen Grössen sind. Daraus folgt, dass auf dem geschlossenen Wege, der aus beiden zusammengesetzt ist, t_2 in eine lineare Function von sich selbst übergeht; und da t_1 und x selbst lineare Functionen von t_2 sind, so gilt dasselbe von diesen Grössen.

Wenn wir also x in dem ganzen Bereich des Gebildes als Function von p und q auffassen, so ist dieselbe eine vielwerthige; und zwar lassen sich alle Werthe, die x an irgend einem Punkte des Gebildes annehmen kann, in der Form darstellen: $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von p und q unabhängig sind. Als nicht singuläre Stellen bezeichnen wir diejenigen, für die es möglich ist, eine lineare Function von x zu bilden, welche dort unendlich klein von der ersten Ordnung wird; von den singulären, die sämmtlich auf der reellen Curve liegen, wissen wir, dass es für sie eine lineare Function x' von x giebt, die sich in der Form

$$x' = c\log(\tau)+\tau^{-\lambda}\mathfrak{P}(\tau)$$

in der Umgebung der Stelle darstellen lässt*).

§. 11.

Wir gehen jetzt dazu über, x in einen Quotienten zweier Functionen z_1 und z_2 zu zerlegen, welche so beschaffen sind, dass alle Werthepaare

*) $\mathfrak{P}(\tau)$ bedeutet hier und im Folgenden immer eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von τ, deren constantes Anfangsglied von Null verschieden ist.

(z_1', z_2'), welche sich aus einem herleiten lassen, in der Form

$$z_1' = \alpha z_1 + \beta z_2,$$
$$z_2' = \gamma z_1 + \delta z_2$$

dargestellt werden können.

Wir bilden irgend eine rationale oder Integralfunction w von p und q, und differentiiren diese nach x. Wenn wir jetzt p und q eine beliebige geschlossene Linie des Gebildes durchlaufen lassen, so kann w sich um eine Periode vermehren und x in eine lineare Function $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ von sich selbst übergehen; wir nehmen der Einfachheit wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ an; alsdann verwandelt sich auf diesem Wege:

$$\frac{dw}{dx} \quad \text{in} \quad (\gamma x + \delta)^2 \frac{dw}{dx},$$
$$x^2 \frac{dw}{dx} \quad \text{in} \quad (\alpha x + \beta)^2 \frac{dw}{dx}.$$

Wenn wir

$$z_1 = x\sqrt{\frac{dw}{dx}}, \qquad z_2 = \sqrt{\frac{dw}{dx}}$$

setzen, so geht auf dem Wege, auf welchem x sich in $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ verwandelt,

$$z_1 \quad \text{in} \quad \alpha z_1 + \beta z_2,$$
$$z_2 \quad \text{in} \quad \gamma z_1 + \delta z_2$$

über. Damit sind zwei Functionen gefunden, welche die verlangte Eigenschaft haben. Untersuchen wir jetzt, wie sich diese Functionen in der Nähe irgend einer Stelle (p_0, q_0) des Gebildes durch die Grösse τ ausdrücken lassen. Zunächst lässt sich $\frac{dw}{d\tau}$ in dieser Form entwickeln:

$$\frac{dw}{d\tau} = \tau^{\mu}\mathfrak{P}(\tau),$$

wo μ im Allgemeinen gleich Null ist, und nur bei einer besonderen Wahl der Stelle (p_0, q_0) von Null verschieden sein kann, dann aber eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Wir wissen ferner, dass, gleichviel ob (p_0, q_0) ein singuläres Werthepaar ist oder nicht, eine lineare Function x' von x existirt, die sich folgendermassen entwickeln lässt:

$$x' = c\log(\tau) + \tau^{-\lambda}\mathfrak{P}(\tau).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx'}{d\tau} = \tau^{-\lambda-1}\mathfrak{P}(\tau).$$

Denn, wenn $\lambda = 0$ ist, so ist c von Null verschieden; es wird also $\frac{dx'}{d\tau}$ für $\tau = 0$ von der ersten Ordnung unendlich. Für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ übt das Glied $c\tau^{-1}$ auf die Ordnung von $\frac{dx'}{d\tau}$ keinen Einfluss, und für alle übrigen Werthe von λ ist $c = 0$. Hieraus folgt:

$$\frac{dw}{dx'} = \tau^{\mu+\lambda+1}\mathfrak{P}(\tau),$$

$$z_2' = \sqrt{\frac{dw}{dx'}} = \tau^{\frac{\mu+\lambda+1}{2}}\mathfrak{P}_2(\tau),$$

$$z_1' = x'\sqrt{\frac{dw}{dx'}} = c z_2' \log(\tau) + \tau^{\frac{\mu-\lambda+1}{2}}\mathfrak{P}_1(\tau).$$

Da x' eine lineare Function von x ist, so lassen sich z_1 und z_2 linear durch diese beiden Ausdrücke darstellen:

$$z_1 = fz_1' + gz_2', \quad z_2 = hz_1' + kz_2'.$$

Diejenigen Stellen, in denen λ von -1 verschieden ist, die also den Eckpunkten der Fläche A entsprechen, nennen wir wesentlich singuläre Punkte. Fällt (p_0, q_0) nicht mit einem von diesen zusammen, so ist $\lambda = -1$, $c = 0$, also:

$$z_2' = \tau^{\frac{\mu}{2}}\mathfrak{P}_2(\tau), \quad z_1' = \tau^{\frac{\mu}{2}+1}\mathfrak{P}_1(\tau).$$

Ist μ von Null verschieden, so nennen wir (p_0, q_0) eine ausserwesentlich singuläre Stelle. An den nicht singulären Stellen lassen sich also z_1 und z_2 linear durch zwei Potenzreihen darstellen, von denen die eine für $\tau = 0$ einen von Null verschiedenen Werth hat, die andere von der ersten Ordnung unendlich klein wird.

Es seien

$$(g_0, h_0), \quad (g_1, h_1), \quad \ldots \quad (g_n, h_n)$$

die singulären Stellen des Gebildes, und

$$(\lambda_0, \mu_0), \quad (\lambda_1, \mu_1), \quad \ldots \quad (\lambda_n, \mu_n)$$

die zugehörigen Werthe von λ und μ. Dann bilden wir für jede der Stellen (g_1, h_1), (g_2, h_2), ... (g_n, h_n) das Normalintegral dritter Gattung $J(pq, g_\nu h_\nu)$, welches nur an dieser Stelle und der Stelle (g_0, h_0) unendlich wird. Aus

diesen Integralen setzen wir folgende Summe zusammen:

$$\vartheta = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{\mu_\nu + \lambda_\nu + 1}{2} J(p\,q, g_\nu h_\nu) \right\}.$$

Dann lässt sich dieser Ausdruck, wenn wir von der besonderen Stelle (g_0, h_0) absehen, in der Umgebung jeder anderen Stelle (p_0, q_0) des Gebildes in folgender Weise entwickeln:

$$\vartheta = \frac{\mu+\lambda+1}{2} \log(\tau) + \vartheta_0 + \vartheta_1 \tau + \vartheta_2 \tau^2 + \cdots$$

(denn es ist $\mu+\lambda+1=0$, wenn die Stelle (p_0, q_0) keine singuläre ist). Bezeichnen wir die Summe $\Sigma\left(\frac{\mu+\lambda+1}{2}\right)$, ausgedehnt über alle singulären Stellen, die ausgezeichnete (g_0, h_0) eingeschlossen, mit σ, so ist an dieser letzteren Stelle:

$$\vartheta = \left(\frac{\mu_0+\lambda_0+1}{2} - \sigma\right) \log(\tau) + \vartheta_0' + \vartheta_1' \tau + \text{etc.}$$

Die Constante σ ist unabhängig von der Wahl der Function w. Denn $\Sigma(\mu)$ ist nach einem Satze aus der Theorie der Integrale gleich $2\varrho-2$, folglich:

$$\sigma = \varrho - 1 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_\nu + 1).$$

Bilden wir jetzt die Exponentialgrösse e^{ϑ}, so lässt sich diese in der Nähe einer Stelle (p_0, q_0) entwickeln in der Form:

$$(1.) \qquad e^{\vartheta} = \tau^{\frac{\mu+\lambda+1}{2}} \mathfrak{P}(\tau),$$

wenn (p_0, q_0) von (g_0, h_0) verschieden ist; und wenn (p_0, q_0) mit dieser letzteren Stelle zusammenfällt, in der Form:

$$(1.') \qquad e^{\vartheta} = \tau^{\frac{\mu_0+\lambda_0+1}{2} - \sigma} \mathfrak{P}(\tau).$$

z_1 und z_2 lassen sich in jedem dieser beiden Fälle linear darstellen durch zwei Ausdrücke von der Form:

$$(2.) \qquad z_2' = \tau^{\frac{\mu+\lambda+1}{2}} \mathfrak{P}_2(\tau), \quad z_1' = c\, z_2' \log(\tau) + \tau^{\frac{\mu-\lambda+1}{2}} \mathfrak{P}_1(\tau).$$

Setzen wir nun:

$$y_1 = z_1 e^{-\vartheta}, \quad y_2 = z_2 e^{-\vartheta},$$

so haben diese Grössen dieselben wesentlichen Eigenschaften wie z_1 und z_2. Denn es ist erstens $\frac{y_1}{y_2} = x$. Zweitens, da e^{ϑ} sich auf einem geschlossenen

Wege nur um einen constanten Factor vermehren kann, so sind alle Werthe, die y_1 und y_2 annehmen können, durch zwei bestimmte derselben darstellbar in der Form:

$$y = fy_1+gy_2,$$

wo f und g Constanten bedeuten. In ihrem Verhalten an den singulären Punkten sind diese Functionen aber einfacher als die vorigen. Denn aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt, wenn (p_0, q_0) von (g_0, h_0) verschieden ist, dass sich y_1 und y_2 in der Umgebung von (p_0, q_0) linear und homogen durch zwei Ausdrücke von der Form:

$$(3.)\qquad y_2' = \mathfrak{P}_2(\tau),\quad y_1' = c\,\mathfrak{P}_2(\tau)\log(\tau)+\tau^{-\lambda}\mathfrak{P}_1(\tau)$$

darstellen lassen; es giebt also jedenfalls eine Function fy_1+gy_2, welche für $\tau = 0$ weder Null noch unendlich wird. An der ausgezeichneten Stelle dagegen ist:

$$(3.')\qquad y_2' = \tau^{\sigma}\mathfrak{P}_2(\tau),\quad y_1' = c\tau^{\sigma}\mathfrak{P}_2(\tau)\log(\tau)+\tau^{\sigma-\lambda_0}\mathfrak{P}_1(\tau).$$

Die ausserwesentlich singulären Punkte der Functionen z_1 und z_2 sind also hier in einen einzigen vereinigt worden.

§. 12.

Wir beweisen jetzt, dass fz_1+gz_2, fy_1+gy_2 die vollständigen Integrale zweier linearen homogenen Differentialgleichungen sind; was man nach den Eigenschaften der Functionen z_1, z_2 und y_1, y_2 erwarten konnte. Aus den Gleichungen:

$$z_1 = x\sqrt{\frac{dw}{dx}},\quad z_2 = \sqrt{\frac{dw}{dx}}$$

folgt:

$$z_2^2\frac{dx}{dw} = 1,\quad x = \frac{z_1}{z_2};$$

mithin:

$$z_2\frac{dz_1}{dw}-z_1\frac{dz_2}{dw} = 1.$$

Differentiiren wir diese Gleichung noch einmal nach w, so erhalten wir:

$$z_2\frac{d^2z_1}{dw^2}-z_1\frac{d^2z_2}{dw^2} = 0,$$

oder, wenn wir den Quotienten $\frac{1}{z_1}\frac{d^2z_1}{dw^2}$ mit $F(p, q)$ bezeichnen:

$$\frac{d^2z_1}{dw^2} = z_1F(p, q),\quad \frac{d^2z_2}{dw^2} = z_2F(p, q).$$

Hieraus folgt, wenn $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ gesetzt wird, wo α und β willkürliche Constanten sind:

$$(1.)\qquad \frac{d^2 z}{dw^2} = z F(p, q).$$

Man erkennt somit, dass $F(p, q)$ seinen Werth nicht ändert, wenn auf einem geschlossenen Wege z_1 und z_2 in lineare Functionen ihrer selbst übergehen. $F(p, q)$ ist also eine eindeutige Function von p und q.

Es sei (p_0, q_0) eine beliebige Stelle des Gebildes; dann giebt es wenigstens eine Grösse $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, welche sich in der Nähe derselben durch eine Reihe von folgender Form darstellen lässt:

$$z = \tau^\nu + c_1 \tau^{\nu+1} + c_2 \tau^{\nu+2} + \text{etc.},$$

wo ν keine ganze Zahl zu sein braucht. dw ist ein rationales Differential; folglich lassen sich die Quotienten $\frac{1}{z}\frac{dz}{dw}$ und $\frac{1}{z}\frac{d^2z}{dw^2}$ nach aufsteigenden ganzen Potenzen von τ entwickeln. Nun gilt aber der Satz: Eine eindeutige Function von p und q, welche an jeder Stelle des Gebildes den Charakter einer rationalen Function besitzt, ist eine rationale Function. Folglich ist $F(p, q)$ eine rationale Function von p und q.

Setzen wir $z = y e^\vartheta$, so erhalten wir:

$$\frac{dz}{dw} = e^\vartheta\left(\frac{dy}{dw} + y\frac{d\vartheta}{dw}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dw^2} = e^\vartheta\left(\frac{d^2y}{dw^2} + 2\frac{dy}{dw}\frac{d\vartheta}{dw} + y\left[\frac{d^2\vartheta}{dw^2} + \left(\frac{d\vartheta}{dw}\right)^2\right]\right).$$

Mithin geht die Gleichung (1.) über in folgende:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + 2\frac{d\vartheta}{dw}\frac{dy}{dw} + \left(\frac{d^2\vartheta}{dw^2} + \left(\frac{d\vartheta}{dw}\right)^2 - F(p, q)\right) y = 0;$$

oder, wenn wir die Coefficienten

$$2\frac{d\vartheta}{dw} \quad \text{mit} \quad \varphi(p, q),$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dw^2} + \left(\frac{d\vartheta}{dw}\right)^2 - F(p, q) \quad \text{mit} \quad \psi(p, q)$$

bezeichnen, in:

$$(2.)\qquad \frac{d^2y}{dw^2} + \varphi(p, q)\frac{dy}{dw} + \psi(p, q)\, y = 0.$$

Da $d\vartheta$ und dw rationale Differentiale sind, so sind $\varphi(p, q)$ und $\psi(p, q)$ rationale Functionen von p und q.

§. 13.

Wir haben jetzt zu untersuchen, wie die Coefficienten φ und ψ einer solchen Differentialgleichung zu bestimmen sind, damit die particulären Integrale derselben sich an jeder Stelle des Gebildes in der Form, welche wir im vorletzten Paragraphen angegeben haben, entwickeln lassen. Wir würden finden, dass $\frac{1}{2}\int\varphi(p,q)\,dw$ ein Integral dritter Gattung sein muss, welches sich von dem angegebenen, ϑ, nur um ein Integral erster Gattung unterscheiden kann, und können deshalb geradezu $\varphi(p,q)=2\frac{d\vartheta}{dw}$ setzen, wo

$$\vartheta = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\mu_\nu+\lambda_\nu+1}{2}J(pq,g_\nu h_\nu)$$

ist. — Um für eine beliebige Stelle (p_0, q_0) das Verhalten von $\psi(p,q)$ zu bestimmen, ersetzen wir das Differential dw durch das Differential $d\tau$. Die Gleichung $\frac{d^2y}{dw^2}+\varphi\frac{dy}{dw}+\psi y=0$ geht dann über in folgende:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+A\frac{dy}{d\tau}+By = 0,$$

wo

$$A = \frac{d}{d\tau}\left(2\vartheta-\log\frac{dw}{d\tau}\right),$$

$$B = \psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$$

ist. Es sei nun zuerst (p_0, q_0) von (g_0, h_0) verschieden; dann muss es ein particuläres Integral y geben, welches durch eine gewöhnliche, für $\tau=0$ nicht verschwindende Potenzreihe $\mathfrak{P}(\tau)$ ausgedrückt wird. In diesem Falle ist

$$\vartheta = \frac{\mu+\lambda+1}{2}\log(\tau)+\vartheta_0+\vartheta_1\tau+\text{etc.},$$

$$\log\left(\frac{dw}{d\tau}\right) = \mu\log\tau+\eta_0+\eta_1\tau+\text{etc.};$$

folglich

$$A = (\lambda+1)\tau^{-1}+A_0+A_1\tau+\text{etc.}$$

Es kann also $\frac{1}{y}\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}+A\frac{dy}{d\tau}\right)$ für $\tau=0$ nur von der ersten Ordnung unendlich werden, und zwar auch dies nur in dem Falle, dass (p_0, q_0) einer der wesentlich singulären Punkte ist, weil sonst $\lambda+1=0$ ist. Hieraus erkennt man:

$\psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$ bleibt endlich für $\tau=0$, wenn (p_0, q_0) nicht mit einem der

wesentlich singulären Punkte zusammenfällt; dagegen, wenn (p_0, q_0) eine der wesentlich singulären Stellen ist, kann $\psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$ für $\tau=0$ von der ersten Ordnung unendlich gross werden.

Es sei jetzt (p_0, q_0) die ausgezeichnete Stelle (g_0, h_0). Dann können wir setzen:

$$y = \tau^\sigma + c_1\tau^{\sigma+1} + c_2\tau^{\sigma+2} + \text{etc.},$$

$$\vartheta = \left(\frac{\lambda_0+\mu_0+1}{2} - \sigma\right)\log(\tau) + \vartheta_0' + \vartheta_1'\tau + \cdots,$$

$$\log\left(\frac{dw}{d\tau}\right) = \mu_0\log(\tau) + \eta_0' + \eta_1'\tau + \cdots,$$

folglich:

$$A = (\lambda_0 + 1 - 2\sigma)\tau^{-1} + A_0 + A_1\tau + \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$B = -\frac{1}{y}\left(\frac{d^2y}{d\tau^2} + A\frac{dy}{d\tau}\right) = \sigma(\sigma-\lambda_0)\tau^{-2} + (\sigma A_0 + (\lambda_0+1)c_1)\tau^{-1} + \text{etc.}$$

Hier wird also $B = \psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$ von der zweiten Ordnung unendlich; aber der Coefficient des ersten Gliedes, und wenn (g_0, h_0) keiner der wesentlich singulären Punkte ist, sogar die der beiden ersten Glieder sind bekannte Grössen.

Hiernach lassen sich die Coefficienten φ und ψ aufstellen. Aber es stellt sich heraus, nachdem dieses geschehen, dass die durch die Differentialgleichung definirten Functionen y_1 und y_2 von mehr wesentlichen Parametern abhängen, als die direct durch das Abbildungsproblem definirten. Dies hat folgende Ursache. Auf einem geschlossenen Wege im Innern von *B*, der einen Zweig der reellen Curve umschliesst, geht im Allgemeinen y_1 in $\alpha y_1 + \beta y_2$, y_2 in $\gamma y_1 + \delta y_2$ über. Soll nun $\frac{y_1}{y_2}$ eine im Innern von B eindeutige Function sein, was für das Abbildungsproblem nothwendig ist, so muss $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \delta$ sein. Zur vollständigen Bestimmung der Coefficienten φ und ψ tritt daher, wenn $\rho > 0$ ist, noch eine Anzahl transcendenter Gleichungen hinzu.

§. 14.

Wir wollen jetzt, soweit dies nach dem Vorhergehenden möglich ist, die Form der Differentialgleichung für einige specielle Fälle bestimmen.

Zunächst für den Fall, dass A ein zusammenhängendes Gebiet ist. Dann ist $\varrho = 0$. Für $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ können wir die einfachste Gleichung vom Range Null nehmen, nämlich $q = \text{Const.}$; das Gebilde geht dann über in die Ebene der complexen Grösse p, B und B' in die positive und negative Halbebene. Wir setzen ferner $w = p$. Für einen endlichen Punkt p_0 der Ebene p können wir setzen $\tau = p - p_0$, es ist daher $\frac{dw}{d\tau} = 1$ und $\mu = 0$. Für den unendlich fernen setzen wir $\tau = \frac{1}{p}$, dann ist $\frac{dw}{d\tau} = \tau^{-2}$, daher $\mu = -2$. Den letzteren Punkt lassen wir mit einem der wesentlich singulären zusammenfallen, was stets möglich ist.

Die den Eckpunkten des Kreispolygons A entsprechenden Werthe von p seien demnach

$$\infty, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_n;$$

an die Stelle des Integrals $J(pq, g_\nu h_\nu)$ tritt dann $\log(p - p_\nu)$; es ist also

$$\vartheta = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu + 1) \log(p - p_\nu),$$

und mithin:

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu + 1}{p - p_\nu}.$$

Der andere Coefficient ψ kann im Endlichen nur unendlich werden an den Stellen $p_1, p_2, \ldots p_n$, und zwar an jeder dieser Stellen nur von der ersten Ordnung; er hat daher die Form:

$$\psi = \frac{G(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n)},$$

wo $G(p)$ eine ganze Function von p bedeutet. An der ausgezeichneten Stelle $p = \infty$ ist

$$B = \psi \tau^{-4} = \sigma(\sigma - \lambda_0) \tau^{-2} + \text{etc.}$$

Folglich muss $G(p)$ vom Grade $n-2$ und der Coefficient der höchsten Potenz p^{n-2} gleich $\sigma(\sigma - \lambda_0)$ sein. Es ist also

$$G(p) = \sigma(\sigma - \lambda_0) p^{n-2} + G_{n-1} p^{n-1} + G_{n-2} p^{n-2} + \cdots + G_0.$$

Hiermit ist die Form der Differentialgleichung, in diesem Falle vollständig, bestimmt.

§. 15.

Ist die Fläche zweifach zusammenhängend, also $\varrho = 1$, so können wir für $\mathfrak{G}(p, q) = 0$ die Normalgleichung vom Range Eins:

$$q^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3,$$

und für w das Integral erster Gattung

$$u = \int \frac{dp}{q}$$

nehmen. Wir setzen voraus, dass u in einem der singulären Punkte, dem mit (g_0, h_0) bezeichneten, verschwindet, und dass in diesem p und q unendlich gross werden. Bei dieser Wahl der Grösse w ist μ überall gleich Null; das Integral dritter Gattung ist:

$$J(pq, p'q') = \tfrac{1}{2}\int \frac{q+q'}{p-p'}\, du;$$

es ist also, wenn wir die übrigen singulären Punkte, ausser $p=\infty$, $q=\infty$, mit

$$(p_1, q_1), \quad (p_2, q_2), \quad \ldots \quad (p_n, q_n)$$

bezeichnen,

$$\varphi(p, q) = 2\frac{d\vartheta}{du} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\lambda_\nu+1}{2}\,\frac{q+q_\nu}{p-p_\nu}\right).$$

Der andere Coefficient $\psi(p, q)$ wird im Endlichen ebenfalls nur an diesen n Stellen unendlich; er muss also die Form haben:

$$\psi(p, q) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\left(\frac{q+q_\nu}{p-p_\nu}\right) + \psi_0(p, q),$$

wo $\psi_0(p, q)$ eine ganze Function von p und q bedeutet.

An der unendlich fernen Stelle können wir τ durch u ersetzen, welches für $p=\infty$, $q=\infty$ von der ersten Ordnung verschwindet. Es ist dann

$$p = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1 u^2 + \cdots,$$

$$q = \frac{-2}{u^3} + 2c_1 u + \cdots$$

und, nach der bewiesenen Formel

$$\psi = \sigma(\sigma-\lambda_0)u^{-2} + \text{etc.}$$

Es wird also $\psi(p, q)$ von der zweiten Ordnung unendlich. $\Sigma c_\nu\left(\frac{q+q_\nu}{p-p_\nu}\right)$ wird aber nur von der ersten Ordnung unendlich; es muss daher $\psi_0(p, q)$ von der zweiten Ordnung unendlich werden und die Form haben:

$$\psi_0(p; q) = \sigma(\sigma-\lambda_0)p + c_0.$$

In der Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} + \varphi\frac{dy}{du} + \psi y = 0$$

ist, also zu setzen:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu+1)\frac{q+q_\nu}{p-p_\nu},$$

$$\psi = \sigma(\sigma-\lambda_0)p+c_0+\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\frac{q+q_\nu}{p-p_\nu}.$$

Es ist zuweilen vortheilhaft, die ausgezeichnete Stelle $p=\infty$, $q=\infty$ nach einem nicht singulären Punkte zu verlegen. Alsdann hat man nur $\lambda_0=-1$ zu setzen, dann aber ψ so zu bestimmen, dass für kleine Werthe von u:

$$\psi = \sigma(\sigma+1)u^{-2}+\sigma A_0 u^{-1}+\text{etc.}$$

wird, wo A_0 den Coefficienten von u^0 in der Entwickelung von $A=2\frac{d\vartheta}{du}$ nach Potenzen von u bedeutet. A ist hier gleich $\varphi(p,q)$. Nehmen wir z. B. den einfachen Fall, dass die Fläche begrenzt sei durch zwei unter einem Winkel $\lambda\pi$ sich schneidende Gerade und einen Kreis, der innerhalb der Schenkel dieses Winkels liegt. Dann sind nur zwei singuläre Punkte vorhanden, und für beide hat λ denselben Werth; es ist also $\sigma=\lambda+1$. Wir denken uns u so gewählt, dass in dem einen dieser Punkte $u=u'$, in dem anderen $u=-u'$ ist; alsdann gehören zu denselben zwei Werthepaare (p',q') und $(p',-q')$. Es ist also

$$\varphi(p,q)=\frac{\lambda+1}{2}\left(\frac{q+q'}{p-p'}+\frac{q-q'}{p-p'}\right)=\frac{(\lambda+1)q}{p-p'}.$$

Dies ist eine ungerade Function von u, also $A_0=0$.

Ferner ergiebt sich

$$\psi(p,q) = (\lambda+1)(\lambda+2)p+c_0+c_1\frac{q+q'}{p-p'}+c_2\frac{q-q'}{p-p'}.$$

Nun darf, da $A_0=0$ ist,

$$\psi(p,q)-(\lambda+1)(\lambda+2)p$$

für unendlich grosse Werthe von p und q nicht mehr unendlich werden. Daraus folgt, dass $c_1+c_2=0$ sein muss; es ist also

$$\psi(p,q)=(\lambda+1)(\lambda+2)p+c+\frac{c'}{p-p'},$$

und die Differentialgleichung lautet daher in diesem Falle:

$$\frac{d^2y}{du^2}+\frac{(\lambda+1)q}{p-p'}\frac{dy}{du}+\left((\lambda+1)(\lambda+2)p+c+\frac{c'}{p-p'}\right)y = 0.$$

Ersetzt man das Differential du durch dp, so verschwindet q ganz aus dieser Gleichung, und die Coefficienten werden rationale Functionen von p allein:

$$\frac{d^2y}{dp^2}+\left(\frac{\lambda+1}{p-p'}+\frac{\frac{1}{2}R'(p)}{R(p)}\right)\frac{dy}{dp}+\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)p^2+G_1p+G_0}{(p-p')R(p)}y = 0.$$

§. 16.

Ist jede der Linien, welche die Grenze der Fläche A bilden, ein vollständiger Kreis, so ist in dem Gebilde (p, q) gar kein singulärer Punkt vorhanden. Für jede Stelle des Gebildes giebt es dann eine lineare Function x' von x, welche dort von der ersten Ordnung unendlich klein wird; so dass in der Nähe jedes Punktes das Gebilde durch Potenzreihen einer solchen Grösse x' dargestellt werden kann.

p und q, als abhängig von x betrachtet, haben im Innern und auf der Grenze des Gebietes A den Charakter eindeutiger rationaler Functionen. Setzt man diese Functionen fort über eine der Grenzlinien L hinaus, so erhält man zunächst p und q definirt für ein zweites Gebiet A', das aus dem vorigen durch Transformation der reciproken Radien entsteht und nur die Linie L mit A gemeinsam hat. In dem aus A und A' zusammengesetzten Gebiete sind daher p und q eindeutige rationale Functionen von x. Dieses Gebiet ist durch $2\varrho+1$ Kreise begrenzt, und wir können es wieder über einen der Kreise hinaus erweitern, u. s. f.; aber da jedes neue Gebiet von dem früheren durch eine geschlossene Linie getrennt ist, so sind p und q eindeutige Functionen, wie weit man auch das Gebiet derselben ausdehnen mag. Ihre charakteristische Eigenschaft ist, dass sie bei bestimmten linearen Transformationen, die sich auf ϱ primitive zurückführen lassen, unverändert bleiben.

Die Functionen y_1 und y_2, als deren Quotient x dargestellt wird, haben jetzt nur einen singulären Punkt, nämlich die ausgezeichnete Stelle (g_0, h_0), behalten aber auch an dieser den Charakter ganzer Functionen. Hier ist nämlich, da $\sigma=\varrho-1$,

$$y_1' = \tau^{\varrho}\mathfrak{P}_1(\tau), \quad y_2' = \tau^{\varrho-1}\mathfrak{P}_2(\tau).$$

An jeder anderen Stelle dagegen:

$$y_1' = \tau\mathfrak{P}_1(\tau), \quad y_2' = \mathfrak{P}_2(\tau).$$

Für $\varrho = 1$ nimmt die Differentialgleichung folgende Form an:

$$\frac{d^2y}{du^2}+cy = 0,$$

wo u das Integral erster Gattung, c eine Constante bedeutet. Denn setzen wir $w=u$, so ist an jeder Stelle des Gebildes $\mu=0$ und deshalb auch $\varphi(p,q)=0$; $\psi(p,q)$ aber kann nur an der ausgezeichneten Stelle (g_0, h_0) unendlich werden. An dieser aber muss die Entwickelung von $\psi(p,q)$ mit folgenden Gliedern beginnen:

$$\psi(p,q)=\sigma(\sigma+1)u^{-2}+\sigma A_0 u^{-1}+\text{etc.}$$

Nun ist aber $\sigma=\varrho-1=0$; folglich kann ψ an keiner Stelle unendlich gross werden und muss somit eine Constante sein. Zwei particuläre Integrale dieser Gleichung sind

$$y'=e^{u\sqrt{-c}} \quad \text{und} \quad y''=e^{-u\sqrt{-c}}.$$

Der Quotient beider muss eine lineare Function von x sein; wir erhalten also:

$$\sqrt{-e}\,u = \tfrac{1}{2}\log\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},$$

$$du=\int\frac{dp}{\sqrt{R(p)}}, \quad q^2=R(p).$$

Bezeichnen wir mit 2ω die reelle, mit $2\omega'$ die imaginäre Periode des Integrals u, so muss $\log\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ sich um $\pm 2\pi i$ vermehren, wenn u in $u+2\omega$ übergeht. Daraus folgt:

$$\sqrt{-c}\,2\omega = \pi i,$$

$$\text{oder:}\quad c = \frac{\pi^2}{4\omega^2}.$$

Die Differentialgleichung für y_1 und y_2 lautet also vollständig:

$$\frac{d^2y}{du^2}+\frac{\pi^2}{4\omega^2}y = 0.$$

In dem Falle $\varrho=2$, wo das Gebiet A von drei Kreisen begrenzt ist, können wir für $\mathfrak{G}(p,q)=0$ die Normalgleichung vom Range 2:

$$q^2=4p^5-g_2p^3-g_3p^2-g_4p-g_5=R(p)$$

setzen, und für w das Integral erster Gattung:

$$w=\int\frac{dp}{\sqrt{R(p)}}.$$

Hier ist μ nur an der unendlich fernen Stelle von Null verschieden, und zwar ist hier $\mu=2$. Wenn wir daher diese als die ausgezeichnete an-

nehmen, so ist $\varphi = 0$ und $\psi(p, q)$ eine ganze Function von p und q, da sie nur für unendlich grosse Werthe von p und q unendlich wird.

Wir setzen, um die Entwickelung von ψ in der Nähe dieser Stelle zu erhalten, $p = \tau^{-2}$. Dann geht, durch Einführung des Differentials $d\tau$, die Gleichung für y in folgende über:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + A\frac{dy}{d\tau} + By = 0,$$

wo

$$A = -\frac{d}{d\tau}\log\left(\frac{dw}{d\tau}\right) = -2\tau^{-1} + A_0 + A_1\tau + \text{etc.},$$

$$B = \psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = 2\tau^{-2} + A_0\tau^{-1} + \text{etc.}$$

ist. Nun ist offenbar q eine ungerade, $\frac{dw}{d\tau}$ eine gerade Function von τ. Daraus folgt, dass auch A ungerade und deshalb $A_0 = 0$ ist. $\frac{dw}{d\tau}$ beginnt mit dem Gliede $-\tau^{-2}$; es ist also

$$\psi = 2\tau^{-6} + c_1\tau^{-4} + c_2\tau^{-3} + \text{etc.}$$

Hieraus folgt, dass ψ diese Form haben muss:

$$\psi = 2p^3 + h_1p^2 + h_2p + h_3.$$

Die Differentialgleichung wird also folgende:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + (2p^3 + h_1p^2 + h_2p + h_3)y = 0.$$

Es möge dieselbe Untersuchung noch für den Fall $\rho = 3$ durchgeführt werden. Hier kann die Normalgleichung, welche nur ein unendlich fernes Element besitzt, drei verschiedene Formen annehmen:

$$\text{(I.)} \qquad \mathfrak{G}(p, q) = q^2 - R(p),$$

wo

$$R(p) = p^7 + g_2p^5 + \cdots + g_7$$

ist.

$$\text{(II.)} \qquad \mathfrak{G}(p, q) = q^3 + G_2(p)q - G_3(p) = 0,$$

wo

$$G_2(p) = g_1p^2 + g_2p + g_3,$$
$$G_3(p) = p^4 + g_2'p^2 + g_3'p + g_4'.$$

$$\text{(III.)} \qquad \mathfrak{G}(p, q) = q^3 - gq^2 + pF(p)q - p^2G(p) = 0,$$

wo g eine Constante,

$$F(p) = g_1p^2 + g_2p + g_3,$$
$$G(p) = p^3 + g_1'p^2 + g_2'p + g_3'$$

ist.

Die beiden ersten Fälle haben das Gemeinsame, dass die Gleichung keinen Doppelpunkt besitzt; woraus folgt, dass jede rationale Function von p und q, welche nur an der unendlich fernen Stelle des Gebildes unendlich gross wird, sich als ganze Function dieser Grössen darstellen lassen muss. Wir können in diesen beiden Fällen

$$dw = \frac{dp}{\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{G}(p,q)}$$

setzen; nehmen wir dann $p=\infty$, $q=\infty$ als die ausgezeichnete Stelle, so ist $\mu_0 = 4$, und für jede andere Stelle $\mu = 0$. Daraus folgt, dass die Gleichung für y die Form hat:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \psi(p,q)y = 0,$$

wo $\psi(p,q)$ eine ganze Function von p und q bedeutet, und zwar von dem zehnten Grade, da $\frac{dw}{d\tau}$ von der vierten Ordnung unendlich klein, $\psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$ aber von der zweiten Ordnung unendlich gross wird. Es muss in Folge dessen im ersten Falle

$$\psi(p,q) = h_0p^5 + h_1p^4 + \cdots + h_5 + (h_0'p + h_1')q,$$

im zweiten:

$$\psi(p,q) = hq^2 + (h_0p^2 + h_1p + h_2)q + h_0'p^3 + \cdots + h_3'$$

sein. Von den acht Coefficienten h lassen sich zwei bestimmen durch die Formel

$$\psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = \sigma(\sigma-\lambda_0)\tau^{-2} + (\sigma A_0 + (\lambda_0+1)c_1)\tau^{-1} + \text{etc.}$$

Diese nimmt hier, da $\sigma = \varrho - 1 = 2$, $\lambda_0 = -1$ ist, folgende Gestalt an:

$$\psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = 6\tau^{-2} + 2A_0\tau^{-1} + \text{etc.}$$

Wir können für das erstere Gebilde, wo p an der unendlich fernen Stelle von der zweiten Ordnung unendlich wird, setzen: $p = \tau^{-2}$, und ebenso für das zweite: $p = \tau^{-3}$; dann wird $A_0 = 0$,

$$\frac{dw}{d\tau} = -\tau^4 + \alpha\tau^6 + \beta\tau^7 + \text{etc.},$$

$$\psi(p,q) = 6\tau^{-10} + c_1\tau^{-8} + c_2\tau^{-7} + \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt sich in beiden Fällen:

$$h_0 = 6, \quad h_0' = 0.$$

Es bleibt noch der dritte Fall übrig. Dieser ist allgemeiner als die beiden vorigen, weil nur in diesem die Gleichung $\mathfrak{G}(p,q)=0$ die volle Anzahl wesentlicher Constanten, nämlich 6, enthält. Hier setzen wir

$$dw = \frac{p\,dp}{\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{G}(p,q)}.$$

Dies ist ein Integral erster Gattung. Die Entwickelung von $\frac{dw}{d\tau}$ an der unendlich fernen Stelle beginnt, wenn wir dort $p=\tau^{-3}$ setzen, mit $-\tau^3$; da nun $\Sigma\mu=4$ ist, so muss noch eine Stelle $g_1 h_1$ vorhanden sein, für welche $\mu=1$ ist. Dies ist die Stelle $p=0$, $q=g$.

Wir haben also ein Integral dritter Gattung ϑ zu bilden, welches sich an dieser Stelle in folgender Weise entwickeln lässt:

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\log\tau+\vartheta_0+\vartheta_1\tau+\text{etc.},$$

und an der unendlich fernen Stelle:

$$\vartheta = -\tfrac{1}{2}\log\tau+\vartheta_0'+\vartheta_1'\tau+\text{etc.},$$

sonst aber überall den Charakter einer ganzen Function hat. Ein solches ist

$$\vartheta=\tfrac{1}{2}\int\frac{q^2\,dp}{p\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{G}(p,q)}=\tfrac{1}{2}\int\frac{q^2\,dw}{p^2}.$$

Es ist also

$$\varphi(p,q) = \frac{q^2}{p^2}.$$

$\psi(p,q)$ kann ausser an der unendlich fernen Stelle nur unendlich werden für $p=0$, $q=g$, und zwar da $\psi\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2$ an dieser letzteren Stelle nur ganze Potenzen von τ enthalten darf, von nicht höherer als der zweiten Ordnung. An der ausgezeichneten Stelle $p=\infty$, $q=\infty$ wird dagegen ψ von der achten Ordnung unendlich, da $\frac{dw}{d\tau}$ mit $-\tau^3$ anfängt.

$p^2\psi(p,q)=F(p,q)$ ist also eine Function, die nur an der unendlich fernen Stelle unendlich wird, und die an dem Doppelpunkte des Gebildes: $p=0$, $q=0$ von der zweiten Ordnung unendlich klein wird. Eine solche Function muss sich darstellen in der Form:

$$F(p,q) = p^2L(p)+pq\,M(p)+q^2N(p),$$

wo L, M, N ganze Functionen von p bedeuten. Ferner, da, für unendlich grosse Werthe von p und q, $F(p,q)$ von der vierzehnten Ordnung unend-

lich wird, müssen $L(p)$ und $M(p)$ vom zweiten, $N(p)$ vom ersten Grade sein. Wir erhalten also:

$$F(p,q) = (h_0 p + h_1) q^2 + (h_0' p^3 + h_1' p^2 + h_2' p) q + h_0'' p^4 + h_1'' p^3 + h_2'' p^2.$$

Von diesen acht Coefficienten werden wiederum zwei durch die für unendlich grosse Werthe von p und q geltende Formel

$$\psi \left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = 6\tau^{-2} + 2A_0 \tau^{-1} + \text{etc.}$$

bestimmt, und zwar ergiebt die Entwickelung:

$$h_0' = 6, \quad h_0 = -2g_1.$$

Wir bekommen also folgende Differentialgleichung:

$$p^2 \frac{d^2 y}{dw^2} + q^2 \frac{dy}{dw} + F(p,q) y = 0,$$

p und q sind durch die Gleichung

$$\mathfrak{G}(p,q) = q^3 - g q^2 + (g_1 p^3 + g_2 p^2 + g_3 p) q - (p^5 + g_1' p^4 + g_2' p^3 + g_3' p^2) = 0$$

verbunden,

$$F(p,q) = (-2g_1 p + h_1) q^2 + (6p^3 + h_1' p^2 + h_2' p) q + h_0'' p^4 + h_1'' p^3 + h_2'' p^2$$

und

$$dw = \frac{dp}{\mathfrak{G}_2},$$

wenn $\mathfrak{G}_2$ die Ableitung von $\mathfrak{G}(p,q)$ nach q bedeutet.

Berlin, 1877.

[redacted]

